

Einstellbare Filter

von

Wolfgang Winkelkemper

Erlangen 1972

1973 № 57

Einstellbare Filter

Der Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg
zur Erlangung des Grades
DOKTOR - INGENIEUR

vorgelegt

von

Wolfgang Winkelkemper

Erlangen 1972



Als Dissertation genehmigt von der
Technischen Fakultät
der Universität Erlangen-Nürnberg

Tag der Einreichung:	30. Mai 1972
Tag der Promotion:	6. Dezember 1972
Dekan:	Prof. Dr. rer. nat. G. Meinardus
Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. W. Schüssler
	Prof. Dr.-Ing. D. Seitzer

1. Einleitung	1 - 2
2. Kinetischer Filter mit Beschleunigung	2 - 12
3. Filter mit kinematischer Beschleunigung	3 - 1
4. Kinetischer Filter	4 - 2
5. Kinetischer Filter	5 - 12
6. Kinetischer Filter	6 - 12
7. Kinetischer Filter	7 - 12
8. Kinetischer Filter	8 - 12
9. Kinetischer Filter	9 - 12
10. Kinetischer Filter	10 - 12
11. Kinetischer Filter	11 - 12
12. Kinetischer Filter	12 - 12
13. Kinetischer Filter	13 - 12
14. Kinetischer Filter	14 - 12
15. Kinetischer Filter	15 - 12
16. Kinetischer Filter	16 - 12
17. Kinetischer Filter	17 - 12
18. Kinetischer Filter	18 - 12
19. Kinetischer Filter	19 - 12
20. Kinetischer Filter	20 - 12
21. Kinetischer Filter	21 - 12
22. Kinetischer Filter	22 - 12
23. Kinetischer Filter	23 - 12
24. Kinetischer Filter	24 - 12
25. Kinetischer Filter	25 - 12
26. Kinetischer Filter	26 - 12
27. Kinetischer Filter	27 - 12
28. Kinetischer Filter	28 - 12
29. Kinetischer Filter	29 - 12
30. Kinetischer Filter	30 - 12
31. Kinetischer Filter	31 - 12
32. Kinetischer Filter	32 - 12
33. Kinetischer Filter	33 - 12
34. Kinetischer Filter	34 - 12
35. Kinetischer Filter	35 - 12
36. Kinetischer Filter	36 - 12
37. Kinetischer Filter	37 - 12
38. Kinetischer Filter	38 - 12
39. Kinetischer Filter	39 - 12
40. Kinetischer Filter	40 - 12
41. Kinetischer Filter	41 - 12
42. Kinetischer Filter	42 - 12
43. Kinetischer Filter	43 - 12
44. Kinetischer Filter	44 - 12
45. Kinetischer Filter	45 - 12
46. Kinetischer Filter	46 - 12
47. Kinetischer Filter	47 - 12
48. Kinetischer Filter	48 - 12
49. Kinetischer Filter	49 - 12
50. Kinetischer Filter	50 - 12
51. Kinetischer Filter	51 - 12
52. Kinetischer Filter	52 - 12
53. Kinetischer Filter	53 - 12
54. Kinetischer Filter	54 - 12
55. Kinetischer Filter	55 - 12
56. Kinetischer Filter	56 - 12
57. Kinetischer Filter	57 - 12
58. Kinetischer Filter	58 - 12
59. Kinetischer Filter	59 - 12
60. Kinetischer Filter	60 - 12
61. Kinetischer Filter	61 - 12
62. Kinetischer Filter	62 - 12
63. Kinetischer Filter	63 - 12
64. Kinetischer Filter	64 - 12
65. Kinetischer Filter	65 - 12
66. Kinetischer Filter	66 - 12
67. Kinetischer Filter	67 - 12
68. Kinetischer Filter	68 - 12
69. Kinetischer Filter	69 - 12
70. Kinetischer Filter	70 - 12
71. Kinetischer Filter	71 - 12
72. Kinetischer Filter	72 - 12
73. Kinetischer Filter	73 - 12
74. Kinetischer Filter	74 - 12
75. Kinetischer Filter	75 - 12
76. Kinetischer Filter	76 - 12
77. Kinetischer Filter	77 - 12
78. Kinetischer Filter	78 - 12
79. Kinetischer Filter	79 - 12
80. Kinetischer Filter	80 - 12
81. Kinetischer Filter	81 - 12
82. Kinetischer Filter	82 - 12
83. Kinetischer Filter	83 - 12
84. Kinetischer Filter	84 - 12
85. Kinetischer Filter	85 - 12
86. Kinetischer Filter	86 - 12
87. Kinetischer Filter	87 - 12
88. Kinetischer Filter	88 - 12
89. Kinetischer Filter	89 - 12
90. Kinetischer Filter	90 - 12
91. Kinetischer Filter	91 - 12
92. Kinetischer Filter	92 - 12
93. Kinetischer Filter	93 - 12
94. Kinetischer Filter	94 - 12
95. Kinetischer Filter	95 - 12
96. Kinetischer Filter	96 - 12
97. Kinetischer Filter	97 - 12
98. Kinetischer Filter	98 - 12
99. Kinetischer Filter	99 - 12
100. Kinetischer Filter	100 - 12

Herrn Professor Dr.-Ing. W. Schüssler danke ich für die interessante Aufgabenstellung, für seine zahlreichen Anregungen und Hinweise sowohl während der Arbeit als auch bei der Zusammenstellung der Ergebnisse.

Herrn Professor Dr.-Ing. D. Seitzer gebührt mein Dank für sein Interesse an der Abhandlung.

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
1. Einleitung	1 - 3
2. Einstellbare Filter mit Modulatoren	4 - 6
3. Filter mit einstellbaren Elementen	7
3.1 Passive LC-Filter	7 - 8
3.2 RC - aktive Filter	8 - 11
4. Veränderung der Filtercharakteristik durch Veränderung der Abtastfrequenz	12
4.1 Digitale Filter	12 - 16
4.2 N-Pfad-Filter	16
5. Das Transformationsverfahren	17
5.1 Grundlagen	17 - 29
5.2 Anwendung des Transformationsverfahrens auf RC - aktive Filter	29
5.2.1 Reaktanztransformation	29 - 35
5.2.2 Allpaßtransformation	35 - 37
5.2.3 Bemerkungen zur Stabilität	37 - 45
5.3 Anwendung des Transformationsverfahrens auf Abtastfilter	45
5.3.1 Grundlagen	45 - 49
5.3.2 Allpaßtransformation	49 - 52
5.3.3 Zwei praktisch aufgebaute Geräte	52 - 64
5.3.4 Transformation mit weiteren Funktionen	65 - 68
5.3.5 Bemerkungen zur Stabilität	68 - 71
5.4 Ein Vergleich zwischen Abtastfiltern und RC - aktiven Filtern	71 - 73
5.5 Anwendung des Transformationsverfahrens auf digital realisierte Filter	73 - 79

	Seite
6. Frei programmierbare Filter	79
6.1 Einführung	79
6.2 Kontinuierliche Filter	79 - 80
6.3 Abtastfilter	80
6.4 Digitale Filter	81
6.4.1 Einführung	81
6.4.2 Ein praktisch aufgebautes Filter	81
6.4.2.1 Allgemeine Entwurfsüberlegungen	81 - 89
6.4.2.2 Entwicklung der Schaltungen	89 - 101
6.4.2.3 Daten des Filters	103 - 104
6.4.2.4 Einige Anwendungsbeispiele	104 - 110
7. Zusammenfassung	111

Liste der verwendeten Formelzeichen und Abkürzungen

a	Dämpfung
a_S, a_D	Sperr- bzw. Durchlaßdämpfung
α, β	reelle Zahlen
$A(s)$	rationale Funktion von s
$AP(s)$	Allpaßübertragungsfunktion
$b_i, c_i,$ d_i, e_i	Koeffizienten
B	Bandbreite
$B(s)$	rationale Funktion von s
f	Frequenz
$f(t)$	Zeitfunktion
f_A	Abtastfrequenz
f_B	Bezugsfrequenz
f_D	Durchlaßgrenzfrequenz
f_{-D}, f_{+D}	untere bzw. obere Durchlaßgrenzfrequenz
f_{-S}, f_{+S}	untere bzw. obere Sperrgrenzfrequenz
f_m	Mittenfrequenz
f_T	Trägerfrequenz
$F(s)$	rationale Funktion von s
$G(s)$	gerades Polynom in s
$g(t), g_1(t)$ $g_2(t)$	Zeitfunktion
$H(s), H(z)$	Übertragungsfunktion
$J(z)$	rationale Funktion von z
K	Konstante
k_i	Koeffizient
$\lambda, \mu, \nu, \rho,$ ℓ, m, n, r	ganze Zahlen
L S B	Least significant bit = Bit kleinster Wertigkeit

M S B	Most significant bit = Bit größter Wertigkeit
M, N	ganze Zahlen
N(s)	Nennerpolynom einer rationalen Funktion von s
$\Omega = f/f_A$	Normierte Frequenz
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz
$\omega_D, \omega_{D'}$ $\omega_{-D}, \omega_{+S'}$ $\omega_{-s}, \omega_m, \omega_B$	Indizes tragen dieselbe Bedeutung wie bei f
R(s)	Reaktanzzweifunktion
R A M	Random access memory = Schreib-Lese-Speicher
R O M	Read only memory = Festprogrammierter Lesespeicher
φ, ψ	Winkel
$s = \sigma + j\omega$	komplexe Variable
t	Zeit
$T = 1/f_A$	Abtastperiode
τ	Bittaktperiode
U(s)	ungerades Polynom von s
x(t)	Zeitfunktion
X(s)	Laplace-Transformierte
X(z)	Z-Transformierte
$\underline{x}(t)$	Vektor der Zustandsvariablen
y(t)	Zeitfunktion
Y(s)	Laplace-Transformierte
Y(z)	Z-Transformierte
$\xi = \zeta + j\eta$	komplexe Variable
$z = x + jy$	komplexe Variable

1. Einleitung

Einstellbare Filter werden in der Nachrichtentechnik auf den verschiedensten Gebieten eingesetzt. Die weiteste Verbreitung liegt bei den kommerziellen Rundfunkempfängern vor, bei denen mit Hilfe durchstimmbarer Bandfilter aus einer größeren Anzahl von Sendern, die im Frequenzvielfach angeboten werden, ein beliebiger empfangen werden kann. Abstimmbare Filter sind sowohl beim Geradeausempfänger als auch bei der üblichen Superheterodyne-Schaltung erforderlich. Daneben besteht aber auch für Laboraufgaben und Meßzwecke Interesse an Filtern, die weit größere Variationsmöglichkeiten erlauben.

Die Anforderungen an die abstimmbaren Filter in Rundfunkempfängern sind verhältnismäßig leicht zu erfüllen; insbesondere aus Kostengründen wird auf diesem Gebiet in absehbarer Zeit keine Änderung der üblichen Standardschaltungen zu erwarten sein. Bei der zweiten genannten Gruppe von Filtern steht die Kostenfrage nicht so im Vordergrund; hier ist insbesondere eine große Variationsmöglichkeit und exakte Einstellbarkeit der gewünschten Filterdaten von Interesse. In jüngerer Zeit sind einige neue Geräte in RC-aktiver Technik auf den Markt gekommen /1/, die die älteren rein passiven Geräte deutlich übertreffen. Alle diese Geräte verwirklichen jedoch nur Dämpfungscharakteristiken mit fester relativer Flankensteilheit und mehrfachen Dämpfungspolen im Unendlichen oder bei der Frequenz Null ("All-Pole-Filter"); die Optimallösung für ein vorgegebenes Toleranzschema mit konstanter maximaler Durchlaßdämpfung a_{Dmax} und ebenfalls konstanter minimaler Sperrdämpfung a_{Smin} hat jedoch Dämpfungspole bei endlichen Frequenzen /2/.

Seit der Einführung der Betriebsparametertheorie durch Cauer, Piloty, Darlington, Bader und der geschlossenen Lösung des Approximationsproblems für eine große Klasse selektiver Filter durch Cauer /2/ ist es eine Routinearbeit geworden, für ein Toleranzschema der oben zitierten Art eine rationale Übertragungsfunktion $H(s)$ mit reellen Koeffizienten zu bestimmen, deren Betragsverlauf $|H(j\omega)|$ dem gegebenen Toleranzschema genügt, die ferner bezüglich ihres Grades minimal ist und eine

in diesem Sinne optimale Lösung des Problems darstellt. Die Handhabung des Verfahrens ist durch die Angabe geeigneter Transformationen (Saal und Ulbrich /3/, Zdunek /4/) sowie durch die Berechnung von Katalogen normierter Tiefpässe (Glowatzki /5, 6/, Saal /7/, Christian und Eisenmann /8/ u.a.) noch wesentlich vereinfacht worden.

Eine kanonische Reaktanzschaltung, d.h. eine Schaltung mit minimaler Anzahl von Spulen und Kondensatoren, die die Übertragungsfunktion $H(s)$ realisiert, wird in den Katalogen ebenfalls mit angegeben. Diese Reaktanzschaltungen sind beiderseits durch ohm'sche Widerstände abgeschlossen und zeichnen sich durch minimale Empfindlichkeit bezüglich Bauelementeschwankungen aus /9, 10/, worauf in jüngster Zeit z.B. Fettweis /11/ im Zusammenhang mit der Synthese digitaler Filter hingewiesen hat.

Zur Lösung des in dieser Arbeit behandelten Problems der Synthese einstellbarer Filter bieten sich zunächst vier Möglichkeiten an:

1. Das Modulationsverfahren.

Hierbei wird durch Frequenzumsetzerstufen das Spektrum des zu filternden Signales verschoben. Das modulierte Signal läuft dann über ein festes selektives Filter. Macht man die Frequenzen der Träger veränderbar, so lassen sich nach diesem Prinzip einstellbare selektive Filter aufbauen. Das Verfahren wird im Abschnitt 2 näher diskutiert werden.

2. Filter mit einstellbaren Elementen.

Die Filterstruktur liegt fest, die einzelnen Elemente sind (kontinuierlich oder stufenweise) veränderbar, wobei gewisse feste Relationen von Bauelementewerten zueinander auch bei Veränderung festgehalten werden. Nahezu alle kommerziellen einstellbaren Filter arbeiten nach diesem Prinzip. Das Verfahren wird im Abschnitt 3 genauer untersucht werden.

3. Veränderung der Taktfrequenz.

Bei Filtern, die von einem zentralen Takt gesteuert werden (Abtastfiltern, N-Pfad-Filtern, digitalen Filtern) kann eine Veränderung der Filtercharakteristik durch Veränderung der Taktfrequenz erzielt werden. Die Möglichkeiten und Grenzen dieses Verfahrens werden im Abschnitt 4 erläutert.

4. Das Transformationsverfahren.

Dieses Verfahren stellt eine Anwendung der von Schüssler /12/ zusammengefaßt dargestellten allgemeinen Theorie der Verzweigungsnetzwerke auf das Problem der Synthese einstellbarer Filter dar. Seine Brauchbarkeit für RC-aktive Filter wird durch den Aufbau eines solchen Filters am Analogrechner nachgewiesen (Abschnitt 5). Der Entwurf zweier einstellbarer Abtastfilter nach diesem Prinzip wird geschildert, die an den Geräten gewonnenen Meßergebnisse werden diskutiert.

Diese vier erwähnten Verfahren ermöglichen durchweg die Synthese einstellbarer selektiver Filter, bei denen nur die Grenzfrequenzen verändert werden können. Im 6. Kapitel dieser Arbeit werden frei programmierbare Filter untersucht, mit denen weitgehend beliebige Frequenzgänge eingestellt werden können. Es zeigt sich, daß für diesen Zweck digitale Filter wegen ihrer exakt vorausberechenbaren Übertragungseigenschaften, die nicht durch parasitäre Effekte verfälscht werden, sowie wegen ihrer einfachen Programmierbarkeit besonders geeignet sind. Der Entwurf eines solchen Filters, bei dem besonderer Wert auf hohen Bedienungskomfort und große Flexibilität gelegt wurde, wird erläutert und seine vielfältigen Einsatzmöglichkeiten an einigen Beispielen demonstriert.

2. Einstellbare Filter mit Modulatoren

Das Prinzip der im folgenden behandelten Filter zeigt Bild 2.1.

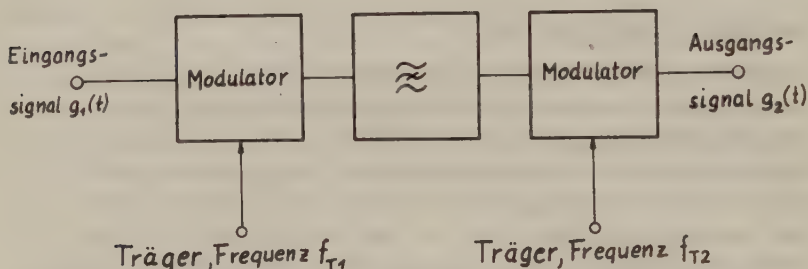


Bild 2.1: Veränderbares selektives Filter mit Modulatoren

Das Eingangssignal wird einem Träger aufmoduliert, man verschiebt dadurch sein Spektrum um die Trägerfrequenz. Das modulierte Signal läuft über ein Filter, dessen Ausgangssignal wird erneut moduliert. Macht man die beiden Trägerfrequenzen gleich und durchstimmbar und wählt man als Festfilter einen Bandpaß oder Tiefpaß, so stellt die Anordnung einen Bandpaß mit konstanter Bandbreite und veränderbarer Mittenfrequenz dar. Allerdings ist am Ausgang noch ein zweiter, verhältnismäßig breiter Bandpaß erforderlich, der die bei der zweiten Modulation entstehenden höheren Modulationsprodukte unterdrückt, was leider auch den möglichen Variationsbereich einschränkt. Kompliziertere Systeme mit größeren Variationseigenschaften sind möglich. Eine ebenfalls einfache, allgemein gebräuchliche Variante der Anordnung nach Bild 2.1 ist im Superheterodyne-Rundfunkempfänger vorhanden, bei dem ja bekanntlich die Selektion in erster Linie in der Zwischenfrequenzstufe durchgeführt wird.

Anlaß für die Entwicklung derartiger Filter ist die Tatsache, daß es verhältnismäßig einfach ist, Oszillatoren zu bauen, deren Frequenz in weiten Grenzen durchstimmbar ist. Diese vorteil-

hafte Variationseigenschaft sollte für den Aufbau veränderbarer selektiver Filter herangezogen werden.

In Erweiterung der einfachen Anordnung nach Bild 2.1 kann man nun statt nur einer mehrere Frequenzumsetzestufen verwenden und dabei mit jeder Umsetzung eine weitere Bandbegrenzung vornehmen. Es ist dann z.B. möglich, die obere und untere Durchlaßgrenze eines Bandpasses unabhängig voneinander einstellbar zu machen. Eine eingehende Untersuchung über die bestehenden Möglichkeiten findet sich in /13/. Zu beachten ist bei der Aufstellung des Frequenzplanes, daß die üblichen Modulatoren neben den gewünschten Seitenbändern auch solche zu Harmonischen des Trägers erzeugen, sie müssen unterdrückt werden. Ferner müssen alle verwendeten Trägerfrequenzen starr miteinander verkoppelt sein, nur so kann verhindert werden, daß die unvermeidliche Drift eines Oszillators Frequenzverschiebungen zwischen Eingangs- und Ausgangssignal des Systems zur Folge hat.

Das geschilderte Verfahren hat einige prinzipbedingte Mängel und etliche praktische Schwierigkeiten:

- a) Bei den oben erwähnten komplizierteren Systemen werden mehrere Filter nacheinander durchlaufen. Die Folge ist, daß sich die Durchlaßdämpfungen addieren, eine gleichmäßige Approximation ("equal-ripple"-Verhalten) für den Durchlaßbereich des Gesamtsystems ist daher unmöglich.
- b) Die Steilheit des Dämpfungsanstieges an den Flanken ist unabhängig von der eingestellten Grenzfrequenz gleich, da die Bandbegrenzung durch ein Festfilter vorgenommen wird. Wenn der Einstellbereich bis zu tiefen Frequenzen reichen soll (z.B. ein Oktavbandpaß für den Audio-Bereich), muß das Festfilter, dessen Flanke bei höheren Frequenzen liegt, sehr steil sein. In /13/ wird zur Abhilfe eine weitere Umsetzung vorgeschlagen, in /14/ ist das Problem durch extrem steile Quarzfilter gelöst.

- c) Ähnliche Überlegungen gelten für die durchstimmbaren Oszillatoren. Während die erforderliche Frequenzstabilität im allgemeinen noch zu erreichen ist, stellt die erforderliche Feinheit der Einstellung ein ernstes Problem dar, das vielfach nur dadurch zu lösen ist, daß der Träger seinerseits durch Mischung aus einer festen Frequenz und einer einstellbaren Niederfrequenz erzeugt wird.
- d) An die Modulatoren und Zwischenverstärker werden bezüglich ihrer Linearität sehr hohe Anforderungen gestellt. Der erreichbare Dynamikbereich ist eingeschränkt, Kreuzmodulationseffekte und das Auftreten von Spiegelfrequenzen verschlechtern den Signal-Geräusch-Abstand.

Die Anwendung derartiger Filter bleibt daher beschränkt auf einfache Systeme, in denen nur ein Band konstanter Breite aus dem Eingangsspektrum herausgefiltert werden soll. Beispiele hierfür sind neben den bereits erwähnten Superhet-Rundfunkempfängern die Klirranalysatoren.

3. Filter mit einstellbaren Elementen

3.1 Passive LC-Filter

Es werde zunächst der einfache Fall betrachtet, daß ein Tiefpaß oder Hochpaß mit veränderbarer Grenzfrequenz gefordert ist. Die Übertragungsfunktion eines beiderseits durch Widerstände abgeschlossenen Filters setzt sich aus Termen sC , sL , R oder deren Kehrwerten zusammen. Es ist daher evident, daß eine proportionale Vergrößerung aller Spulen und Kondensatoren zu einer umgekehrt proportionalen Verkleinerung der Grenzfrequenz führen wird. Mißt man den Frequenzgang zweier Filter, die sich in dieser Weise unterscheiden, so werden die beiden Meßkurven identisch, wenn sich die Skalierung der Abszisse beider Darstellungen um den Proportionalitätsfaktor unterscheidet.

Dieser zunächst einfache Zusammenhang stößt in der praktischen Realisierung auf erhebliche Schwierigkeiten: der Einstellbereich insbesondere von Spulen ist verhältnismäßig gering, die Genauigkeit der Einstellung (als Funktion einer mechanischen Änderung, Drehen eines Verstellknopfes o.ä.) schlecht. Die für den Bedienungskomfort wesentliche Forderung, daß die Änderung des Frequenzganges durch Drehen nur eines Einstellknopfes erreicht werden soll, ist nicht erfüllbar, veränderbare Reaktanzen mit dem erforderlichen Gleichlauf sind wirtschaftlich nicht herstellbar.

Man begnügt sich daher damit, die Reaktanzen nicht kontinuierlich einstellbar zu machen, sondern durch Schalter stufenweise umschaltbar, das Ergebnis ist ein Filter mit stufenweise einstellbarer Grenzfrequenz. Einstellbare Filter dieser Art sind kommerziell erhältlich, z.B. das Gerät HTP 8078 oder dessen modernerer Nachfolger UF 1 der Firma Wandel & Goltermann.

Für die Herstellung von Bandpässen und Bandsperren, bei denen die beiden Grenzfrequenzen getrennt einstellbar sein sollen (d.h. also Bandbreite und Mittenfrequenz unabhängig einstellbar), werden die Verhältnisse noch komplizierter. In /3/ werden die Reaktanztransformationen und die dafür erforderlichen

Bauelementetransformationen ausführlich erläutert, der Zusammenhang zwischen den Werten der Reaktanzen und den Grenzfrequenzen ist explizit bekannt. Jedoch sind die Beziehungen so kompliziert, daß selbst die stufenweise Umschaltung ausichtslos erscheint: die Mittenfrequenz wird durch die Resonanzfrequenz der Schwingkreise bestimmt, die Bandbreite durch die Resonanzfrequenz und die Werte der Einzelelemente. Für ein veränderbares Filter, das etwa in Terzschriften den Audiobereich überdeckt, sind zu viele Elemente erforderlich. Genau genommen wird ja auch nicht ein Filter verändert, sondern zwischen verschiedenen Filtern umgeschaltet.

Kommerzielle Geräte realisieren daher Bandpässe und Bandsperren durch rückwirkungsfreie Ketten- bzw. Parallelschaltung von Tiefpaß und Hochpaß. Die resultierenden Filter sind sicher nicht optimal, denn im Fall des Bandpasses addieren sich die Durchlaßdämpfungen beider Filter, eine in den Einzelfiltern etwa vorliegende gleichmäßige Approximation ("equal ripple") geht verloren, im Fall der Bandsperre addieren sich die im Sperrbereich noch durchgelassenen Restanteile, was je nach Phasenlage eine Reduktion der Dämpfung um bis zu 6 dB bedeutet.

Unabhängig von den geschilderten Problemen sollen jedoch die Vorteile passiver Filter nicht vergessen werden: ihr im Vergleich zu allen aktiven Schaltungen unerreicht hoher Dynamikbereich, ihre global asymptotische Stabilität auch unter Berücksichtigung aller Nichtlinearitäten, sowie ihre nur durch Verluste in nicht idealen Reaktanzen hervorgerufene, vernachlässigbare Verlustleistung.

3.2 RC - aktive Filter

Von den drei in der Theorie linearer Systeme definierten passiven linearen Zweipolelementen: Widerstand, Kapazität, Induktivität, ist die Induktivität das Bauelement, dessen praktische Ausführung am wenigsten mit dem idealen Element übereinstimmt und das zudem am teuersten ist. Man ist daher seit jeher bemüht, aus den möglichen äquivalenten Schaltun-

gen für eine gegebene Übertragungsfunktion diejenige auszuwählen, die die geringste Anzahl von Spulen erfordert /3/. In neuerer Zeit ist durch die gleichzeitige Verbilligung und Verbesserung integrierter Operationsverstärker die gänzlich spulenfreie, aktive RC-Schaltung von zunehmendem Interesse. Daß hiermit beliebige Übertragungsfunktionen realisiert werden können, ist lange bekannt /15/ und wird in jedem Analogrechner ausgenutzt.

Ein umfassender Überblick über den Stand der Technik auf dem Gebiet der spulenlosen Filter findet sich in /16/, eine Übersicht über kommerzielle, einstellbare RC-aktive Filter in /1/.

Zu beachten ist bei aktiven Realisierungen, daß selbstverständlich auch der praktische Operationsverstärker in entscheidenden Punkten vom definierten Ideal abweicht; eine gute Zusammenstellung über die Kenndaten von Operationsverstärkern findet sich z.B. in /17/.

Man kann drei Tendenzen in der Synthese aktiver RC-Schaltungen feststellen:

1. Quasi-passive Schaltungen, in denen die Spulen durch beschaltete Gyratoren ersetzt werden /18/
2. Schaltungen, bei denen die nicht-idealen Kenndaten der Verstärker mit in den Entwurf einbezogen werden /19/
3. Schaltungen, die auf möglichst ideale Verstärker angewiesen sind.

Es leuchtet unmittelbar ein, daß nur mit dem dritten Verfahren einstellbare Filter herstellbar sind: das erste ist zu speziell auf die Nachbildung passiver LC-Schaltungen ausgerichtet und leidet hinsichtlich der Einstellbarkeit unter denselben Schwierigkeiten, das zweite erfordert die Berücksichtigung der Verstärkerdaten, so daß die Einstellverhältnisse sehr unübersichtlich werden.

Neben der Vermeidung von Spulen hat die RC-aktive Schaltung für

die Anwendung bei einstellbaren Filtern einen weiteren Vorteil: im allgemeinen ist für einen beschalteten Operationsverstärker nicht der Widerstand R allein und auch nicht der Kondensator C allein, sondern die Zeitkonstante (RC) frequenzgangbestimmend. Bild 3.1 erläutert dies am Beispiel des Integrierers.

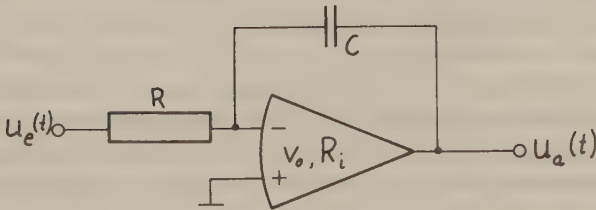


Bild 3.1: Integrierer

Für $R_1 \gg R$ und $|V_o| \gg 1$ ergibt sich die Übertragungsfunktion

$$H_J(s) = - \frac{1}{sRC}$$

Die 0 - dB - Frequenz $f_o = \frac{1}{2\pi RC}$ kann also wahlweise durch Verändern von R oder C variiert werden.

Praktisch wird dies meistens so ausgenutzt, daß man R feinstufig (durch fein abgestufte, umschaltbare Widerstände) oder kontinuierlich (durch Potentiometer) veränderbar macht und durch Umschalten von C in größeren Stufen den Variationsbereich erweitert. Gute kommerzielle Geräte erreichen eine Variation der Grenzfrequenz über bis zu sieben Dekaden /20/.

Ein Problem in der praktischen Realisierung und daher ein Objekt erheblicher Gedankenarbeit ist die meist gewünschte "Einknopfbedienung", d.h. die Veränderung einer gewünschten Kenngröße des Filters durch Verstellen nur eines Bedienungselementes. Von der umfangreichen Literatur sei hier nur ein Bericht erwähnt, dessen Kurzfassung in /21/ wiedergegeben ist. In dem

bereits erwähnten Gerät /20/ ist dieses Problem durch Mehrebenen-Schalter gelöst, mit denen jeweils der ganze Satz von Beschaltungswiderständen umgeschaltet wird.

Einen Beitrag hierzu stellt das neuentwickelte Transformationsverfahren dar, das im Abschnitt 5 beschrieben wird.

4. Veränderung der Filtercharakteristik durch Veränderung der Abtastfrequenz

4.1 Digitale Filter

In diesem Abschnitt sollen nicht die Grundlagen zur Beschreibung und Synthese zeitdiskreter, linearer, zeitinvarianter Systeme beschrieben werden - eine sehr übersichtliche Zusammenfassung mit ausführlichem Literaturnachweis findet sich in /22/ - sondern die Grundlagen zur Synthese selektiver digitaler Filter mit einstellbaren Grenzfrequenzen. Der Begriff "Digitale Filter" wird hier - wie auch in der Literatur - in zwei Bedeutungen verwendet: er bezeichnet zunächst Systeme, die durch Differenzengleichungen beschrieben werden (Definition nach /22/), wird darüber hinaus aber auch für eine Realisierung derartiger Systeme mit digitalen Mitteln im Unterschied zu der Realisierung mit Abtasthaltegliedern ("Abtastfilter") verwendet.

Digitale Filter verarbeiten eine Folge von Zahlenwerten, die am Eingang anliegt, zu einer Folge von Zahlenwerten am Ausgang. Die weitere Verwendung der Ausgangswertefolge sowie die Herkunft der Eingangsfolge sind zunächst uninteressant. Sie kann z.B. durch Abtastung eines kontinuierlichen Signales zu äquidistanten Zeitpunkten gewonnen werden. Wenn die höchste im kontinuierlichen Signal vorkommende Frequenz kleiner ist als die halbe Abtastfrequenz, so läßt sich nach der Aussage des Abtasttheorems das kontinuierliche Signal wieder eindeutig und fehlerfrei aus der Folge der Abtastwerte gewinnen. Man kann daher diese Folge auch unmittelbar in einem digitalen Filter verarbeiten und dessen Ausgangswertefolge wieder in geeigneter Weise zu einem kontinuierlichen Signal interpolieren. Somit lassen sich digitale Filter auf das in dieser Arbeit behandelte Problem einstellbarer Filter anwenden.

Die Übertragungsfunktion $H(z)$ eines digitalen Filters ist eine rationale Funktion von z mit reellen Koeffizienten:

$$H(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} z^{\mu}}{\sum_{v=0}^n c_v z^v} = \frac{b_m \prod_{\mu=1}^m (z - z_{0\mu})}{c_n \prod_{v=1}^n (z - z_{\infty v})} \quad (4.1)$$

$H(z)$ ist kausal, wenn $m \leq n$ ist, und stabil, wenn für die Polstellen gilt: $|z_{\infty v}| < 1$, $v = 1 \dots n$

Aus der Definition $z = e^{sT}$ folgt für den Frequenzgang:

$$H(e^{j2\pi fT}) = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} e^{j2\pi fT\mu}}{\sum_{v=0}^n c_v e^{j2\pi fTv}} ; T = \frac{1}{f_A} \quad (4.2)$$

Man erkennt, daß der Frequenzgang von einer normierten Variablen $fT = f/f_A$ abhängt, eine Veränderung der Abtastfrequenz f_A bedeutet also eine proportionale Dehnung oder Stauchung des Frequenzganges des digitalen Filters in Abszissenrichtung.

Ein praktischer Aufbau für ein derartiges Filter wurde von Kuntz /23/ vorgestellt. Eine Abtasthalteschaltung von Galpin /24/ ist ebenfalls zum Einsatz mit in weiten Grenzen einstellbarer Abtastfrequenz entwickelt worden.

Dieses Verfahren zur Variation des Filters hat im wesentlichen drei Nachteile:

- a) Soll das digitale Filter Teil eines kontinuierlichen Systems sein, so sind zwei weitere kontinuierliche Filter erforderlich (Bild 4.1).

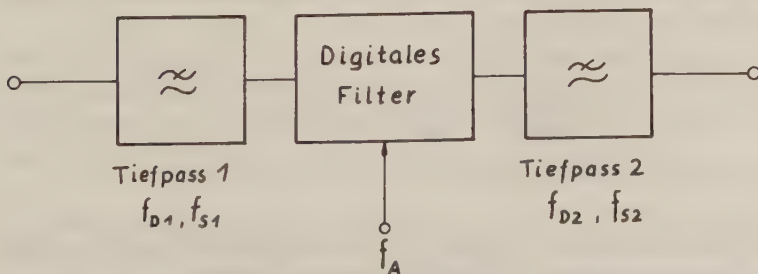


Bild 4.1: Kontinuierliches Filter mit einem digitalen Filter als Kern

Der Eingangstiefpaß mit der Durchlaßgrenze f_{D1} und der Sperrgrenze f_{S1} sorgt für die erforderliche spektrale Begrenzung des Eingangssignales. Das digitale Filter habe im Basisband $0 \leq f \leq f_{A/2}$ einen oder mehrere Durchlaßbereiche. Die höchste durchgelassene Frequenz, bezogen auf die Abtastfrequenz, sei $\Omega_D = f_D/f_A$. Bei $\Omega_S = f_S/f_A > \Omega_D$ beginne der nächsthöhere Sperrbereich des digitalen Filters. Da das Eingangssignal des digitalen Filters keine Spektralanteile haben darf, die in höhere Durchlaßbereiche oberhalb $f_{A/2}$ fallen, ergibt sich für die Abtastfrequenz die Forderung:

$$f_A(1-\Omega_S) \geq f_{S1} , \quad (4.3)$$

d.h.
$$f_{Amin} = \frac{f_{S1}}{1-\Omega_S}$$

Bei einer Erhöhung der Abtastfrequenz ist jetzt aber das digitale Filter nur solange bestimmend für den Gesamtfrequenzgang, wie seine Durchlaßbereiche innerhalb des von dem Vorfilter durchgelassenen Bandes liegen, d.h. solange gilt:

$$f_D = \Omega_D \cdot f_A \leq f_{D1}$$

Daraus ergibt sich als sinnvolle höchste Abtastfrequenz

$$f_{Amax} = \frac{f_{D1}}{\Omega_D} \quad (4.4)$$

Für den Variationsbereich des Filters, d.h. für das Verhältnis der größtmöglichen zur kleinstmöglichen Durchlaßfrequenz folgt mit den Gleichungen (4.3) und (4.4):

$$v = \frac{f_{Dmax}}{f_{Dmin}} = \frac{f_{Amax}}{f_{Amin}} = \frac{f_{D1}}{f_{S1}} \cdot \frac{1-\Omega_S}{\Omega_D} \quad (4.5)$$

Um dieses Verhältnis möglichst groß zu machen, muß

- a) der Übergangsbereich des Eingangstiefpaßfilters sehr schmal, d.h. der Quotient $\frac{f_{D1}}{f_{S1}}$ möglichst groß werden
- b) die bezogenen Grenzfrequenzen Ω_D, Ω_S möglichst klein werden.

Beides bedeutet eine Verschärfung der Anforderungen sowohl an das kontinuierliche als auch an das digitale Filter. Sinnvolle Zahlenwerte wären etwa:

$$\frac{f_{D1}}{f_{S1}} = 0,9 ; \Omega_D = \frac{1}{12} ; \Omega_S = \frac{1}{12 \cdot 0,9}$$

daraus

$$v = \frac{f_{Dmax}}{f_{Dmin}} \approx 10 .$$

Dieser Wert ist relativ klein.

Für Hochpässe und Bandsperren mit $\Omega_D = \frac{1}{2}, \Omega_S > \frac{1}{2}$ liefert die Gl. (4.5) ein Verhältnis $\frac{f_{Dmax}}{f_{Dmin}} < 1$, d.h. diese Filter sind mit dem ge-

schilderten Konzept nur variabel zu machen, wenn die Variation sich auf die niederen Grenzfrequenzen beschränkt und die obere Durchlaßgrenze durch den Eingangstiefpaß fest vorgegeben ist.

Der Ausgangstiefpaß 2 unterdrückt die höheren Spektralanteile im Ausgangssignal des digitalen Filters und hat zweckmäßigerweise dieselben Sperr- und Durchlaßgrenzen wie der Tiefpaß 1.

Wird die Ausgangsimpulsfolge des digitalen Filters mit einem Halteglied interpoliert, so ergibt sich ein zusätzlicher Frequenzgang $(\sin \pi f / f_A) / (\pi f / f_A)$. Da die Abtastfrequenz f_A variabel ist, kann diese Verzerrung des Frequenzganges nur durch eine kompensierende Vorverzerrung im digitalen Filter, nicht in den kontinuierlichen Filtern ausgeglichen werden.

- b) Wenn das digitale Filter Teil eines größeren Systems ist, wird im allgemeinen die Abtastfrequenz von dem System her fest vorgegeben sein; das geschilderte Verfahren zur Realisierung variabler Filter ist in diesem Fall gar nicht anwendbar.
- c) Die überhaupt mögliche Veränderbarkeit beschränkt sich auf eine Dehnung oder Stauchung der Frequenzachse im Frequenzgangdiagramm des digitalen Filters. Es ist aber nicht etwa möglich, den Typ des Filters zu verändern oder bei einem Bandpaß ein Durchlaßband konstanter Breite zu verschieben. Das geschilderte Verfahren ist also sowohl hinsichtlich der Art der möglichen

Variation als auch hinsichtlich des quantitativen Umfanges der Veränderung sehr beschränkt.

Wesentlich weitergehende Variationsmöglichkeiten bietet das in Abschnitt 5 erläuterte Transformationsverfahren.

4.2 N-Pfad-Filter

Eine Klasse neuartiger Filter, die ebenfalls von einer zentralen Taktfrequenz gesteuert werden, wurde von Franks und Sandberg/25/ vorgestellt: das N-Pfad-Filter. In der üblicherweise für die Realisierung herangezogenen Form sind die aufwendigen Modulatoren auf einfache umlaufende elektronische Schalter reduziert. Die Umlauffrequenz bestimmt die Mittenfrequenz des resultierenden Filters, eine Einstellmöglichkeit ist also gegeben. Jedoch leidet das N-Pfad-Filter an anderen Schwierigkeiten: das Schalten hat ein Übersprechen des Trägers auf das Nutzsignal zur Folge. Möhrmann /26/ hat diese Effekte untersucht und Maßnahmen schaltungstechnischer Art zur Verbesserung angegeben. Das zunächst einfach erscheinende N-Pfad-Filter wird dann aber recht aufwendig. Außerdem ist das N-Pfad-Filter sehr empfindlich bezüglich Differenzen der Übertragungsfunktionen der Systeme in den einzelnen Pfaden. Macht man diese Systeme sehr einfach, sind die erreichbaren Übertragungseigenschaften des Gesamtsystems ebenfalls einfach. Macht man sie aufwendig, ist die Identität schwer herzustellen.

5. Das Transformationsverfahren

5.1 Grundlagen

Das im folgenden geschilderte Verfahren ist eine Anwendung der allgemeinen Theorie der Verzweigungsnetzwerke /12/ auf das Problem der Synthese einstellbarer Filter. Es ist sowohl für kontinuierliche aktive als auch für zeitdiskrete Systeme anwendbar, beide Fälle werden erläutert. Das Verfahren ist nicht auf Verzweigungsnetzwerke beschränkt, sondern kann ebenso auf andere Strukturen angewendet werden, die aus rückwirkungsfrei zusammengeschalteten identischen Teilsystemen aufgebaut sind; es wird jedoch hier ausschließlich am Beispiel der Verzweigungsnetzwerke erläutert.

Bild 5.1 zeigt ein Verzweigungsnetzwerk in den bekannten vier kanonischen Formen nach /12/. Die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems ist gegeben durch:

$$H(s) = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} s^{\mu}}{\sum_{v=0}^n c_v s^v} = H'(A(s)) = \frac{\sum_{\mu=0}^{m'} b'_{\mu} (A(s))^{\mu}}{\sum_{v=0}^{n'} c'_v (A(s))^v} \quad (5.1)$$

Dabei muß gelten $m \leq n$ und $m' \leq n'$, ferner seien die beiden Brüche so gekürzt, daß $c_n = c_{n'} = 1$ wird.

$\frac{1}{A(s)}$ ist dabei die Übertragungsfunktion eines der n' identischen Teilsysteme. Von den Teilsystemen wird angenommen, daß sie die Fähigkeit besitzen, am Eingang mehrere Zeitfunktionen aufzusummieren und daß die Beschaltung der Ausgänge rückwirkungsfrei erfolgt. Beides ist unter Verwendung aktiver Elemente ohne Schwierigkeiten erfüllbar.

Wie bereits in /12/ angegeben wurde, brauchen die Teilsysteme nicht notwendig stabil zu sein. Das Gesamtsystem ist realisierbar, wenn die Teilsysteme mit der Übertragungsfunktion $\frac{1}{A(s)}$ realisierbar sind, und es ist stabil, wenn die Übertragungsfunktion $H(s)$ nach Einsetzen der Funktionen $A(s)$ in Gl. (5.1) den bekannten Stabilitätskriterien genügt.

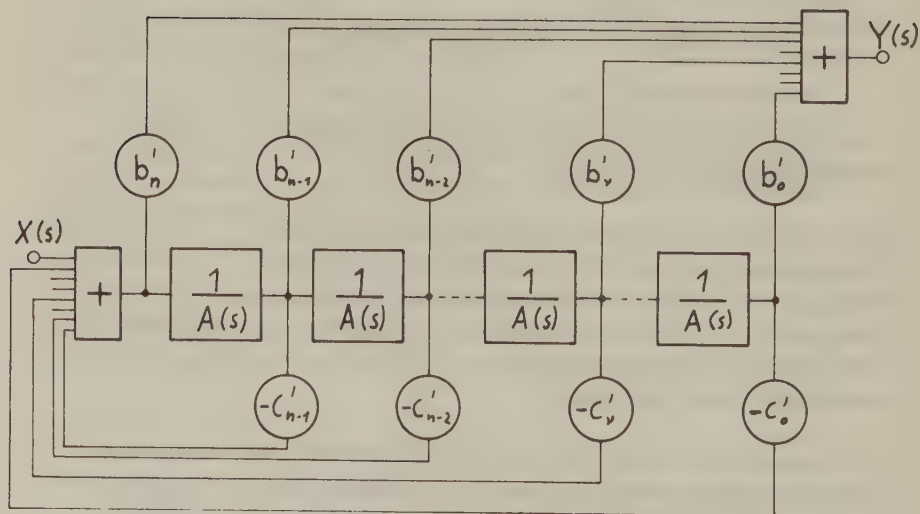
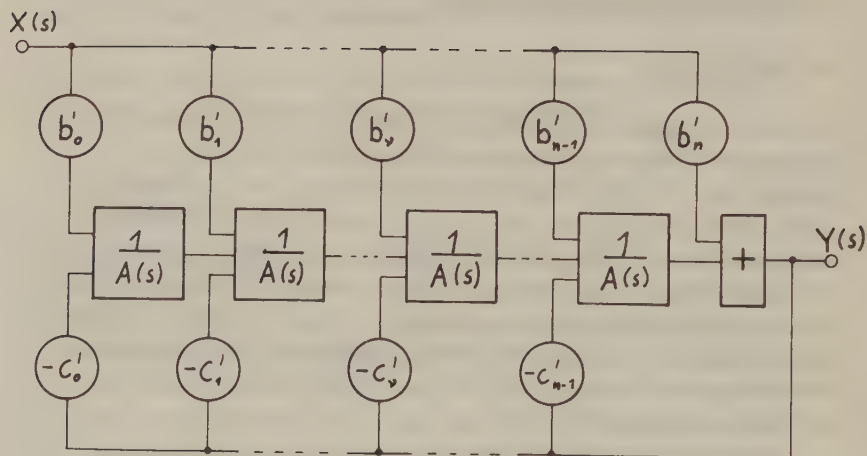
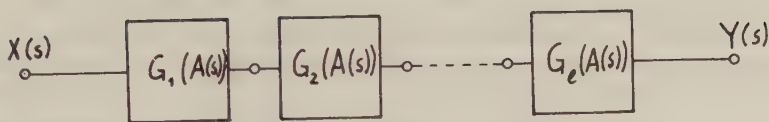
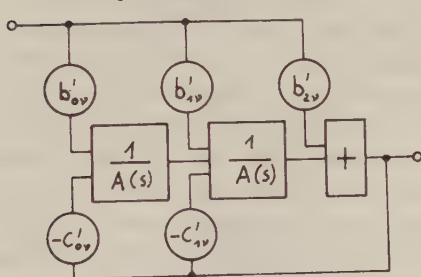


Bild 5.1a: oben: Erste kanonische Form eines Verzweigungsnetzwerkes

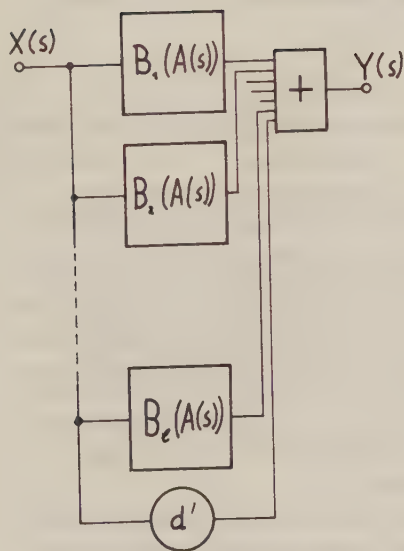
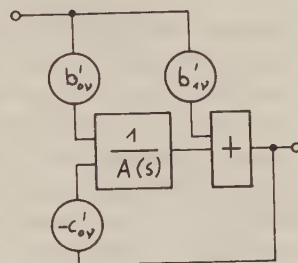
unten: Zweite kanonische Form eines Verzweigungsnetzwerkes



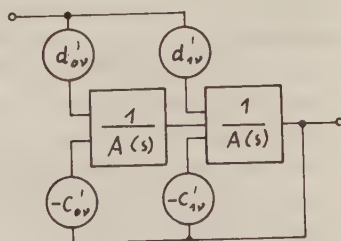
Teilsysteme $G_v(A(s))$:



oder



Teilsysteme $B_v(A(s))$:



oder

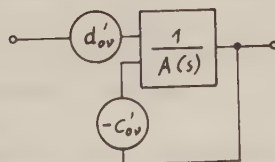


Bild 5.1b: oben: Dritte kanonische Form eines Verzweigungsnetzwerkes

$$H(s) = \prod_{v=1}^{\ell} G_v(s)$$

unten: Vierte kanonische Form $H(s) = \sum_{v=1}^{\ell} B_v(A(s)) + d'$

Für die Anwendung zur Synthese einstellbarer selektiver Filter sind rationale Teilübertragungsfunktionen $\frac{1}{A(s)}$ von Interesse, und zwar zunächst speziell solche vom ersten Grad.

$$\frac{1}{A(s)} = \frac{d_1 s + d_0}{e_1 s + e_0} \quad \wedge \quad s = \frac{d_0 A - e_0}{-d_1 A + e_1} \quad (5.2)$$

Offenbar ist die Darstellung einer gegebenen rationalen Übertragungsfunktion $H(s)$ als Funktion der inversen Teilübertragungsfunktionen in der Form $H'(A(s))$ in diesem Fall immer möglich. Man gewinnt die Koeffizienten b'_μ , c'_ν nach Gl. (5.1), indem man die inverse Funktion $s = s(A)$ in die gegebene Übertragungsfunktion $H(s)$ einsetzt. Es wird nach Gl. (5.2) die s -Ebene konform in die A -Ebene abgebildet, die imaginäre Achse der s -Ebene wird auf einen Kreis in der A -Ebene abgebildet, der im Grenzfall zur Geraden entarten kann. Durchläuft s die Werte von $-j\infty$ bis $+j\infty$, so wird in der A -Ebene der Kreis umlaufen, er soll daher im folgenden als "Kreis reeller Frequenzen" bezeichnet werden. Man kann in der A -Ebene diesen Kreis mit ω parametrieren; $H'(A)$ durchläuft längs dieses Kreises den Frequenzgang $H(j\omega)$. Da $A(s^*) = A^*(s)$ gilt, muß der Kreis reeller Frequenzen stets symmetrisch zur reellen Achse liegen.

Wenn man nun unter Beibehaltung der Koeffizienten b'_μ , c'_ν die Parameter d_0 , d_1 , e_0 , e_1 aller Teilsysteme in gleicher Weise ändert, und zwar derart, daß der Kreis reeller Frequenzen seine Größe und Lage nicht ändert, wohl aber seine ω -Parametrierung, so wird offenbar längs dieses Kreises derselbe Frequenzgang durchlaufen, aber mit anderer Skalierung. Ist $H(s)$ Übertragungsfunktion eines selektiven Filters, z.B. eines Tiefpasses, so können nach diesem Prinzip veränderbare selektive Filter aufgebaut werden. Es wird später gezeigt, daß $A(s)$ in Erweiterung von Gl. (5.2) auch derart geändert werden kann, daß der Kreis reeller Frequenzen mehrfach umlaufen wird; ein Filter mit der Übertragungsfunktion $H(s)$ und nur einem Durchlaßbereich geht dann über in ein neues Filter mit mehreren Durchlaßbereichen.

Die Stabilität des Gesamtsystems ist (unter der selbstverständlichen Voraussetzung, daß $H(s)$ stabil ist) gesichert, wenn die Pole von $H'(A)$ beim Umlaufen des Kreises reeller Frequenzen in Richtung wachsender ω links liegen bleiben; denn die Pole von

$H'(A)$ sind die Abbildungen der Pole von $H(s)$, und das Umlaufen des Kreises reeller Frequenzen in der A-Ebene entspricht dem Durchlaufen der imaginären Achse in der s-Ebene. Bild 5.2 zeigt die Zusammenhänge an einem Beispiel.

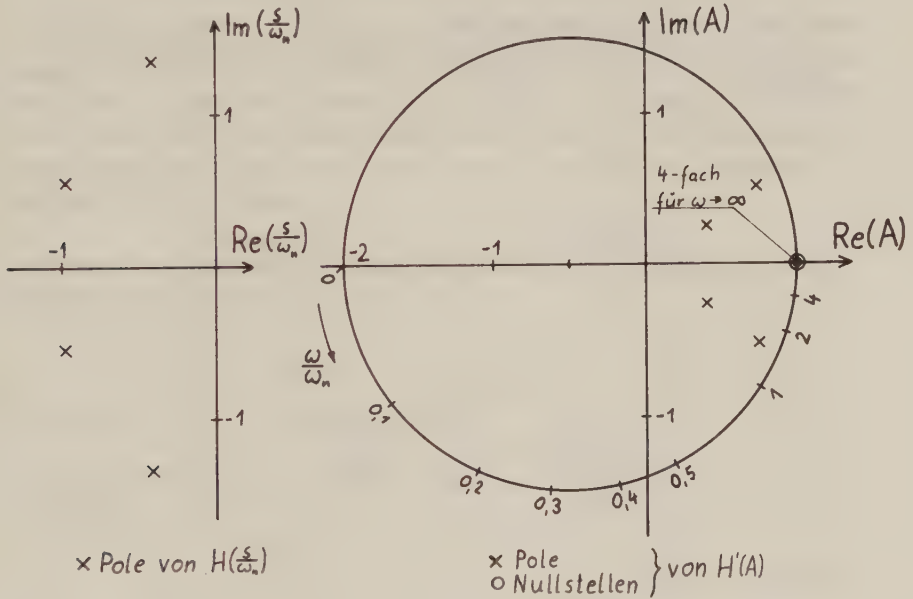


Bild 5.2: Zur Abbildung $s = s(A)$

Als Beispiel wurde ein Tschebyscheff-Tiefpaß 4. Grades /8/ mit einer Durchlaßdämpfung von maximal 0,011 dB und einer Durchlaßgrenzfrequenz von $f_D = \frac{1}{2\pi} \omega_n$ gewählt.

Übertragungsfunktion des Filters:

$$H\left(\frac{s}{\omega_n}\right) = \frac{2,5}{\left[\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 0,81\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1,974\right] \cdot \left[\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 1,956\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1,267\right]}$$

Ferner wurde für die Teilsysteme gewählt:

$$A\left(\frac{s}{\omega_n}\right) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 0,6}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right) - 0,3}$$

Man erhält die Übertragungsfunktion $H'(A)$:

$$H'(A) = \frac{0,5575 (A-1)^4}{(A^2 - 1,45 A + 0,801) (A^2 - 0,8165 A + 0,2333)}$$

Die imaginäre Achse der s-Ebene wird auf den Kreis mit dem Mittelpunkt $(-0,5/0)$ und dem Radius 1,5 in der A-Ebene transformiert ist. Die Parametrierung des Kreises ist im Bild 5.2 angegeben.

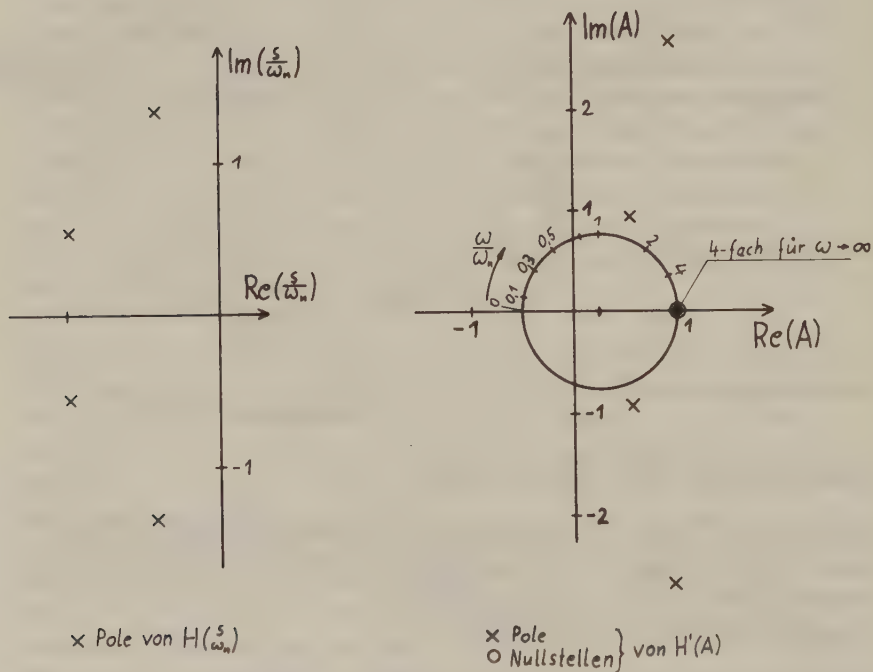


Bild 5.3: Zur Abbildung $s = s(A)$

Bild 5.3 zeigt denselben Tiefpaß mit diesmal anders gewählten Teilsystemen:

$$A \left(\frac{s}{\omega_n} \right) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_n} \right) - 0,5}{\left(\frac{s}{\omega_n} \right) + 1}$$

Die Teilsysteme mit der Übertragungsfunktion $1/A(s)$ sind hier instabil. Man erhält die Übertragungsfunktion

$$H'(A) = \frac{3,715 (A-1)^4}{(A^2 - 1,175 A + 1,215)(A^2 - 1,788 A + 8,023)}$$

Die imaginäre Achse der s-Ebene wird auf den Kreis mit dem Mittelpunkt $(0,25/0)$ und dem Radius $0,75$ in der A-Ebene abgebildet. Die Parametrierung des Kreises ist im Bild 5.3 angegeben. Man erkennt, daß auch hier beim Umlaufen des Kreises in Richtung wachsender ω die Pole von $H'(A)$ links liegen bleiben, das Gesamtsystem ist stabil.

Die Anwendung des geschilderten Verfahrens zur Einstellung der Grenzfrequenz zeigt Bild 5.4.

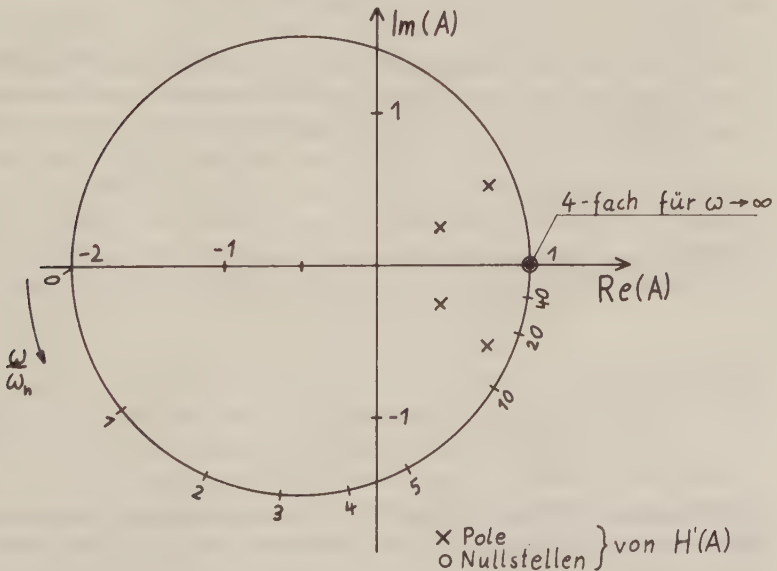


Bild 5.4: Einstellung der Grenzfrequenz durch Variation der Teilsysteme. Fortführung des Beispiels nach Bild 5.2

Die Koeffizienten der Übertragungsfunktion $H'(A)$ sind unverändert, die Teilsysteme sind geändert worden und haben jetzt die Übertra-

gungsfunktion

$$\frac{1}{A(s)} = \frac{\left(\frac{s}{\omega_n}\right) - 3}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 6}$$

Die Pole und Nullstellen und damit auch der Betrags- und Phasenverlauf von $H'(A)$ über der A -Ebene sind identisch mit denen von $H'(A)$ in Bild 5.2. Der Kreis reeller Frequenzen liegt an derselben Stelle, jedoch ist seine ω -Parametrierung dahingehend verändert, daß die Grenzfrequenz des Tiefpasses $H'(A)$ nun bei $f_D = \frac{1}{2\pi} \cdot 10 \omega_n$ liegt.

Es ist nun in allgemeiner Form zu bestimmen, in welcher Weise die Teilsysteme verändert werden dürfen, ohne daß sich der Kreis reeller Frequenzen in der A -Ebene ändert. Ferner muß aus Gründen der Stabilität auch der Umlaufsinn für wachsende ω erhalten bleiben. Hierfür wird die durch Gl. (5.2) vermittelte Abbildung der s -Ebene in die A -Ebene betrachtet.

Es wird zunächst angenommen, daß keiner der beiden Koeffizienten d_0 , d_1 verschwindet. Dann schneidet der Kreis reeller Frequenzen in der A -Ebene die reelle Achse in den Punkten:

$$A(0) = \frac{e_0}{d_0}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} A(s) = \frac{e_1}{d_1} \quad (5.3)$$

d.h. der Kreis hat den Mittelpunkt

$$\left(\frac{1}{2} \left(\frac{e_1}{d_1} + \frac{e_0}{d_0} \right) ; 0 \right) \quad (5.4)$$

und den Radius

$$r = \frac{1}{2} \left| \frac{e_1}{d_1} - \frac{e_0}{d_0} \right| \quad (5.5)$$

Der Umlaufsinn ergibt sich aus einer Betrachtung der Ableitung $\frac{d A(j\omega)}{d\omega}$ an der Stelle $\omega = 0$. Man erhält nach einigen Zwischenrechnungen:

$$\left. \frac{d A(j\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = j \frac{d_1}{d_0} \left(\frac{e_1}{d_1} - \frac{e_0}{d_0} \right) \quad (5.6)$$

Aus den Gleichungen (5.3, 5.4, 5.5, 5.6) gewinnt man die Tabelle 5.1.

$\frac{e_o}{d_o}$	d_1/d_o	$\frac{1}{j} \cdot \frac{dA(j\omega)}{d\omega} \Big _{\omega=0}$	Umlaufsinn
$> e_1/d_1$	> 0	< 0	math. negativ
$< e_1/d_1$	> 0	> 0	math. negativ
$> e_1/d_1$	< 0	> 0	math. positiv
$< e_1/d_1$	< 0	< 0	math. positiv

Bemerkung: Der Fall $e_o/d_o = e_1/d_1$ ist uninteressant, da dann $A(s) = \text{const.}$ wird.

Tabelle 5.1: Zur Bestimmung des Umlaufsinn des Kreises reeller Frequenzen bei der Abbildung der s-Ebene auf die A-Ebene nach Gl. (5.2)

Man entnimmt den Gleichungen (5.4, 5.5), daß der Kreis reeller Frequenzen seine Lage nicht ändert, wenn die Quotienten $\frac{e_1}{d_1}$ und $\frac{e_o}{d_o}$ festgehalten werden. Darüber hinaus ist eine gleichzeitige paarweise Vertauschung von d_o mit d_1 und e_o mit e_1 zulässig; sie bewirkt eine Spiegelung des Kreises reeller Frequenzen an einer Vertikalen durch seinen Mittelpunkt. Aus Tabelle 5.1 ist ersichtlich, daß der Umlaufsinn für wachsende ω erhalten bleibt, wenn das Vorzeichen von (d_1 / d_o) nicht geändert wird. Bei festgehaltenen Quotienten $\frac{e_1}{d_1}$ und $\frac{e_o}{d_o}$ darf dann auch das Vorzeichen von (e_1 / e_o) nicht geändert werden.

In dem bisher ausgeklammerten Fall, daß einer der beiden Koeffizienten d_o , d_1 gleich Null ist, entartet der Kreis reeller Frequenzen zu einer Geraden, die durch den Punkt $\left(\frac{e_1}{d_1} ; 0\right)$ (für $d_o = 0$) bzw. $\left(\frac{e_o}{d_o} ; 0\right)$ (für $d_1 = 0$) parallel zur imaginären Achse verläuft. Wie in dem zuerst behandelten Fall (Tabelle 5.1) ändert sich auch hier die Durchlaufrichtung für wachsende ω nicht, wenn die Vorzeichen der Koeffizienten e_o , e_1 , d_o (bzw. d_1) festgehalten werden.

Die mathematische Formulierung der vorausgegangenen Überlegungen führt auf die Funktionenklasse

$$F(s) = \frac{\alpha \left[(1-\lambda) d_1 + \lambda d_0 \right] s + \left[\lambda d_1 + (1-\lambda) d_0 \right]}{\alpha \left[(1-\lambda) e_1 + \lambda e_0 \right] s + \left[\lambda e_1 + (1-\lambda) e_0 \right]} \quad (5.7)$$

Dabei sind: d_0, d_1, e_0, e_1 reelle feste Koeffizienten

α, λ die Parameter der Funktionenklasse

$$\alpha > 0, \lambda = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Die durch Gl. (5.7) definierte Funktionenklasse hat folgende gemeinsame Eigenschaften:

1. Alle Funktionen aus der Klasse $F(s)$ sind rationale Funktionen ersten Grades mit reellen Koeffizienten.
2. Jede Funktion aus der Klasse $F(s)$ ist Übertragungsfunktion eines nicht notwendig stabilen, aber zumindest unter Verwendung aktiver Elemente realisierbaren linearen Systems.
3. Die imaginäre Achse der s -Ebene wird durch jede Funktion aus der Klasse $F(s)$ auf denselben Kreis reeller Frequenzen in der $\frac{1}{F(s)}$ -Ebene abgebildet. Ist $H(s) = H'(A(s))$ mit $A(s)$ nach Gl. (5.2) Übertragungsfunktion eines stabilen selektiven Filters, so ist auch $H'(1/F(s))$ mit $F(s)$ nach Gl. (5.7) Übertragungsfunktion eines stabilen selektiven Filters. Es gilt $F(s) \Big|_{\substack{\lambda=0 \\ \alpha=1}} = \frac{1}{A(s)}$. Die Veränderung von α und λ kann bei geeigneter Schaltungsauslegung unmittelbar am realen Filter vorgenommen werden.

Das bisher geschilderte Verfahren erlaubt den Aufbau einstellbarer selektiver Filter folgender Art: alle herstellbaren Frequenzgänge unterscheiden sich voneinander nur in der Skalierung der Frequenzachse. Wie man aus Gl. (5.7) sieht, hat der Einstellparameter α keinen anderen Einfluß, als ein normierender Faktor bei der komplexen Variablen s hätte. Es handelt sich also praktisch um Filter mit einstellbarer, eingebauter Entnormierung. Der Übergang $\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 1$ bedeutet die Reaktanztransformation $s \rightarrow \frac{1}{s}$.

Weitergehende Einstellmöglichkeiten erzielt man, wenn die Einschränkung aufgehoben wird, daß die Teilsysteme vom 1. Grad sein sollen. Wir betrachten im folgenden Teilsysteme höheren Grades mit der Übertragungsfunktion

$$\frac{1}{A(s)} = \frac{\sum_{\lambda=0}^{\ell} d_{\lambda} s^{\lambda}}{\sum_{\lambda=0}^{\ell} e_{\lambda} s^{\lambda}}, \quad \ell \geq 2, \quad e_{\ell} = 1 \quad (5.8)$$

Die durch Gl. (5.8) vermittelte Abbildung der s-Ebene in die A-Ebene bildet im allgemeinen Fall die imaginäre Achse der s-Ebene nicht auf einen Kreis in der A-Ebene ab, sondern auf eine Kurve höherer Ordnung. Analog zu dem für lineare Funktionen A(s) erläuterten Verfahren müßten jetzt Funktionenklassen gefunden werden, die die imaginäre Achse der s-Ebene stets auf dieselbe Kurve abbilden, jedoch mit verschiedener ω -Parametrierung.

Andererseits ist aber die Umkehrfunktion $s = s(A)$ von Gl. (5.8) keine rationale Funktion. Die Darstellung einer gegebenen Übertragungsfunktion $H(s)$ in der Form $H'(A(s))$ entsprechend Gl. (5.1) ist nur in speziellen Fällen möglich. Die allgemeine Funktion höheren Grades nach Gl. (5.8) wird daher nicht näher untersucht.

Besonders interessant für ein allgemeines Verfahren zur Synthese einstellbarer Filter sind solche Spezialisierungen von Gl. (5.8), mit denen die imaginäre Achse der s-Ebene auf einen Kreis in der A-Ebene abgebildet wird; denn nach dem vorher Ausgeführten läßt sich eine gegebene Übertragungsfunktion $H(s)$ stets so als Funktion $H'(A(s))$ ausdrücken, daß $H'(A)$ längs des Kreises reeller Frequenzen in der A-Ebene den Frequenzgang $H(j\omega)$ durchläuft. Ist A(s) von zweitem Grade, so wird dieser Kreis im Bereich $-\infty < \omega < +\infty$ zweimal umlaufen.

Es lassen sich zwei Funktionenklassen mit diesen Eigenschaften angeben:

$$1. F(s) = \pm R(s) + C \quad (5.9)$$

Hierbei ist R(s) eine Reaktanzfunktion, die Konstante C ist für jede Funktion dieser Klasse gleich, ebenso das Vorzeichen. Der Kreis reeller Frequenzen in der $\frac{1}{F(s)}$ -Ebene ist ein Kreis

um den Punkt $\left(\frac{1}{2C}; 0\right)$ mit dem Radius $\frac{1}{2C}$. Die Konstante C bringt keine Erweiterung der Möglichkeiten und wird daher im folgenden stets als identisch Null angenommen. Der Kreis reeller Frequenzen geht dann in die imaginäre Achse der $\frac{1}{F(s)}$ -Ebene über. Lineare Funktionen $F(s)$ mit demselben Kreis reeller Frequenzen in der $\frac{1}{F(s)}$ -Ebene ergeben sich aus Gl. (5.7) durch die Spezialisierung: $d_1 = e_0 = 0$.

$$2. F(s) = \pm C_1 \cdot AP(s) + C_2 \quad (5.10)$$

Hierbei ist $AP(s)$ die Übertragungsfunktion eines Allpasses, die beiden Konstanten sind für alle Funktionen einer Klasse identisch. Auch hier bringen die beiden Konstanten keine Erweiterung gegenüber der reinen Allpaßfunktion und werden daher im folgenden stets als $C_1 \equiv 1$, $C_2 \equiv 0$ angenommen. Der Kreis reeller Frequenzen in der $\frac{1}{F(s)}$ -Ebene ist der Einheitskreis. Die Allpässe sind entweder alle stabil oder alle instabil. Im ersten Falle wird die linke s -Halbebene in das Innere des Einheitskreises abgebildet, die Orientierung der ω -Parametrierung ist mathematisch positiv; im zweiten Fall wird die rechte s -Halbebene in das Innere abgebildet, der Kreis wird für wachsende ω im mathematisch negativen Sinn umlaufen. Ohne Einschränkung der bestehenden Variationsmöglichkeiten soll im folgenden stets mit stabilen Allpässen operiert werden. Lineare Funktionen $F(s)$ mit demselben Kreis reeller Frequenzen in der $\frac{1}{F(s)}$ -Ebene ergeben sich aus Gl. (5.7) durch die Spezialisierung: $d_1 = 1$, $e_0 = -d_0 > 0$, $e_1 = 1$.

Die Realisierung von beliebigen Übertragungsfunktionen mit Allpässen als Teilsystemen wurde erstmalig von Schüssler /12/ angegeben und wird im Abschnitt 5.2 unter dem Aspekt der Realisierung variabler Filter untersucht werden.

Man erkennt aus den Gleichungen (5.9) und (5.10), daß die Lage des Kreises reeller Frequenzen unabhängig vom Grade der Funktion $F(s)$ ist.

Die bisherige Unterscheidung in Netzwerke mit Teilsystemen ersten oder höheren Grades soll daher jetzt ersetzt werden durch die Einteilung in Netzwerke mit Teilsystemen, deren Übertragungsfunktion

eine Reaktanzfunktion oder eine Allpaßfunktion ist.

Abschließend sei das Entwurfsverfahren für einstellbare selektive Filter noch einmal kurz zusammengefaßt:

Man wählt eine geeignete Übertragungsfunktion eines selektiven Filters, z.B. eines Tiefpasses. Aus der Funktionenklasse $F(s)$ (Reaktanzfunktion oder Allpaßübertragungsfunktion) greift man eine beliebige Funktion $F_1(s) = \frac{i}{A(s)}$ ersten Grades heraus. Durch Einsetzen der inversen Funktion $s = s(A)$ in die gegebene Übertragungsfunktion $H(s)$ bestimmt man die Koeffizienten b'_u, c'_v nach Gl. (5.1). Das System kann jetzt in einer der Strukturen nach Bild 5.1 aufgebaut werden, dabei werden die Teilsysteme derart realisiert, daß ihre Übertragungsfunktionen identisch, aber innerhalb der Klasse $F(s)$ veränderbar sind. Man erhält so ein selektives Filter mit einstellbaren Grenzfrequenzen.

Offenbar hängt die Brauchbarkeit des geschilderten Verfahrens davon ab, inwieweit der Aufbau derartiger identisch veränderbarer Teilsysteme möglich ist und welcher Zusammenhang zwischen den veränderten Parametern und den resultierenden Grenzfrequenzen besteht. Diese beiden Fragen werden im folgenden genauer untersucht werden.

5.2 Anwendung des Transformationsverfahrens auf RC-aktive Filter

5.2.1 Reaktanztransformation

Die Beziehungen der Reaktanztransformation sind u.a. in /3/ ausführlich dargelegt und werden hier nur der Vollständigkeit halber angeführt.

Es werde zunächst eine Funktionenklasse $F(s)$ nach Gleichung (5.9) betrachtet:

$$F(s) = R(s) \quad , \quad R(s) = \text{Reaktanzfunktion.}$$

Das oben geschilderte Entwurfsverfahren für ein einstellbares selektives Filter ist hier recht einfach, da die Funktion

$R(s) = \frac{1}{s}$ bereits eine Reaktanzfunktion ist. Man wählt also zweckmäßig

$$A(s) = s \quad (5.11)$$

Das Teilsystem mit der Übertragungsfunktion $\frac{1}{A(s)}$ ist dann ein Integrierer und die Koeffizienten von $H'(A)$ sind identisch mit den Koeffizienten der gegebenen Übertragungsfunktion $H(s)$.

Ist $H(s)$ Übertragungsfunktion eines Tiefpasses (Hochpasses), so erhält man einen einstellbaren Tiefpaß (Hochpaß) bereits dadurch, daß die Zeitkonstanten aller Integrierer in gleicher Weise einstellbar sind:

$$R(s) = \frac{a_0}{s} \quad (5.12)$$

Die Grenzfrequenz des resultierenden Filters ist dann $a_0 \cdot f_G$, wenn f_G die Grenzfrequenz des Ausgangsfilters mit der Übertragungsfunktion $H(s)$ war.

Wählt man für $R(s)$ eine Reaktanzfunktion zweiten Grades

$$R(s) = \frac{\beta_0 s}{s^2 + \omega_m^2} \quad (5.13)$$

so ist damit die Tiefpaß-Bandpaß- oder Hochpaß-Bandsperre-Transformation möglich. Der Zusammenhang zwischen den Konstanten β_0 , ω_m und den Daten des resultierenden Filters ist sehr einfach, siehe Bild 5.5.

Aus der Transformationsbeziehung

$$\frac{1}{s} \rightarrow R(s) = \frac{\beta_0 s}{s^2 + \omega_m^2}$$

errechnen sich leicht die formelmäßigen Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \omega_{+D} &= \frac{\beta_0 \omega_D}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta_0 \omega_D}{2}\right)^2 + \omega_m^2} \\ \omega_{-D} &= -\frac{\beta_0 \omega_D}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta_0 \omega_D}{2}\right)^2 + \omega_m^2} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Dabei ist ω_D die Grenzfrequenz des Ausgangsfilters; ω_{+D} und ω_{-D}

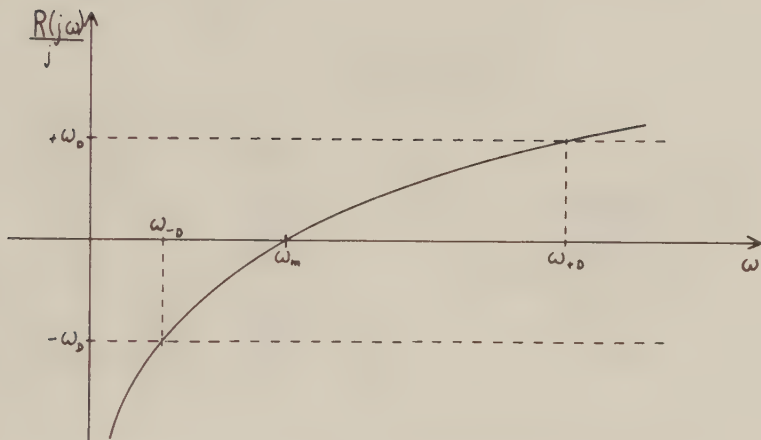


Bild 5.5: Zum Frequenzverlauf der transformierenden Reaktanzfunktion nach Gl. 5.13

sind die beiden Punkte auf der positiven Frequenzachse, für die gilt $\left| \frac{1}{R(j\omega)} \right| = \omega_D$, d.h. die obere und untere Durchlaßgrenze des resultierenden Filters.

Man erhält aus (5.14) für die Bandbreite:

$$B = \omega_{+D} - \omega_{-D} = \beta_0 \omega_D \quad (5.15)$$

und für die Mittenfrequenz

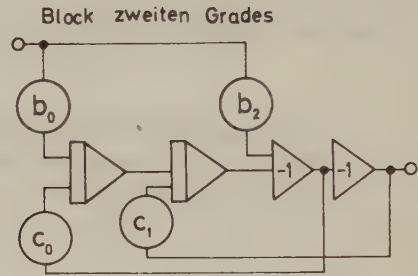
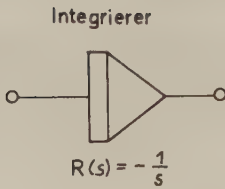
$$\sqrt{\omega_D \omega_{-D}} = \omega_m \quad (5.16)$$

Die (einstellbar zu realisierende) Konstante β_0 bestimmt also unmittelbar die Bandbreite, die (ebenfalls einstellbare) Konstante ω_m die Mittenfrequenz des resultierenden Filters.

Ein Filter dieser Art wurde am Analogrechner aufgebaut und gemessen. Ausgangsfilter war dabei der Tiefpaß C045042a /8/. Das Blockschaltbild für einen Teilblock 2. Grades (bzw. 4. Grades beim Bandpaß) zeigt Bild 5.6, einige Meßergebnisse für verschie-

dene β_o , ω_m sind in Bild 5.7 wiedergegeben.

TIEFPASS



BANDPASS

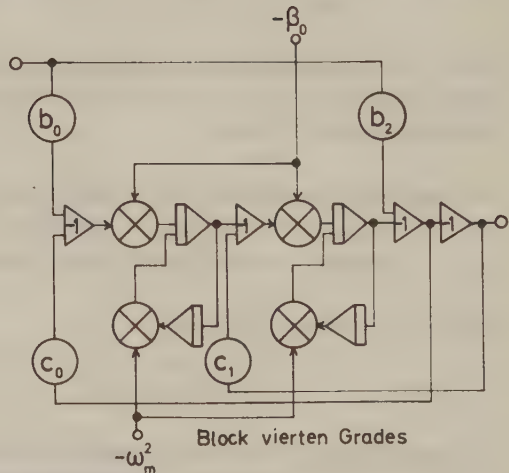
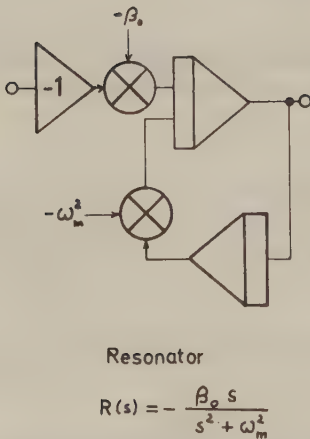


Bild 5.6: Zur Tiefpaß-Bandpaß-Transformation

Die Konstanten β_o , ω_m können über Multiplizierer oder Mehrfachpotentiometer eingestellt werden.

Ein weiteres Beispiel, auf das das Verfahren angewendet werden kann, ist ein Oktavbandpaß. Verlangt sei z.B. ein Oktav-Bandpaß,

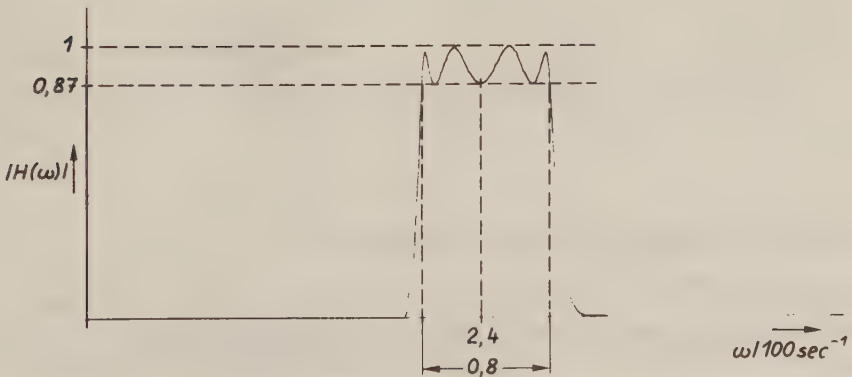
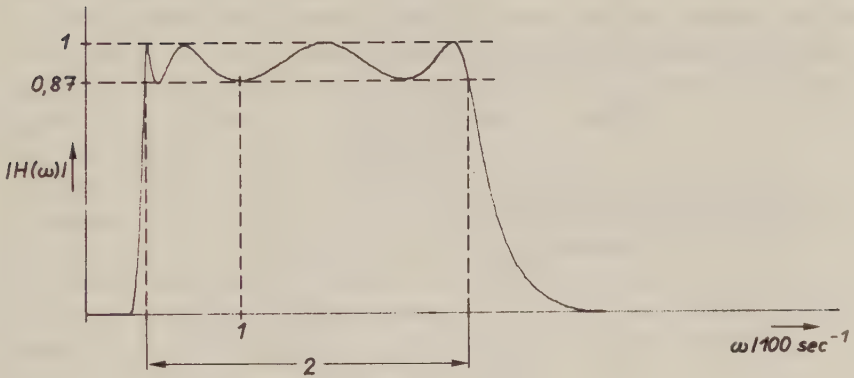
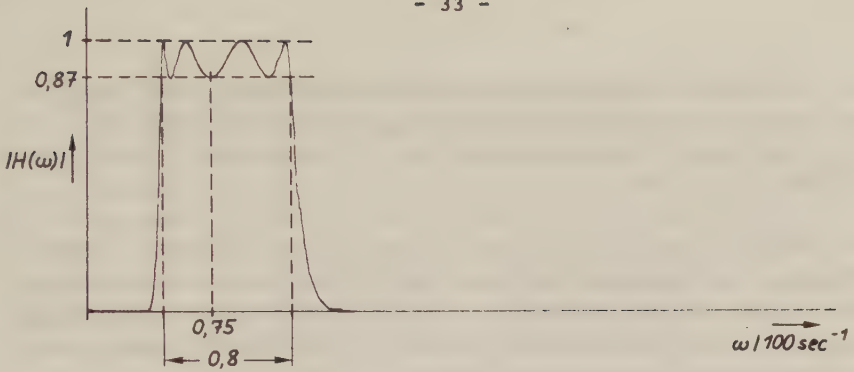


Bild 5.7: Gemessene Frequenzverläufe des variablen Bandpasses.

oben: $\beta_0 = 0,8$, $\omega_m = 0,75$; Mitte: $\beta_0 = 2$, $\omega_m = 1$;

unten: $\beta_0 = 0,8$, $\omega_m = 2,4$

der im Bereich 15 Hz bis 30 kHz beliebig einstellbar ist, d.h. das schmalste Filter hat die Daten $\omega_{-D} = 2\pi \cdot 15 \text{ sec}^{-1}$ und $\omega_{+D} = 2\pi \cdot 30 \text{ sec}^{-1}$, das breiteste: $\omega_{-D} = 2\pi \cdot 15 \cdot 10^3 \text{ sec}^{-1}$ und $\omega_{+D} = 2\pi \cdot 30 \cdot 10^3 \text{ sec}^{-1}$.

Man wählt zunächst einen Tiefpaß, dessen Durchlaßdämpfung, Sperrdämpfung und Flankensteilheit den gestellten Anforderungen genügt. Der Tiefpaß wird so entnormiert, daß seine Grenzfrequenz $f_D = 150 \text{ Hz}$ beträgt. Aus der Forderung $\omega_{+D} = 2 \cdot \omega_{-D}$ (Oktavbandpaß) ergibt sich nach Gl. (5.14) die Bezugsfrequenz $\omega_m = \sqrt{2} \omega_D \beta_0$.

Das Teilsystem, das den invertierenden Integrierer ersetzt, muß daher die Übertragungsfunktion haben:

$$\frac{1}{A(s)} = - \frac{\beta_0 s}{s^2 + 2 \omega_D^2 \beta_0^2}$$

Bild 5.8 zeigt das Schaltbild

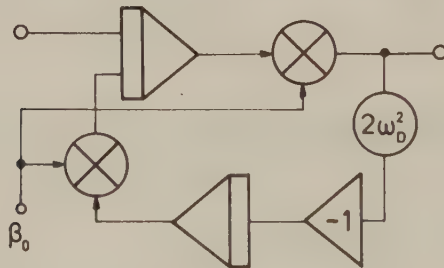


Bild 5.8: Teilsystem für einen Oktavbandpaß

Wählt man nun für β_0 den Variationsbereich $0,1 \leq \beta_0 \leq 1$ und sieht ferner eine Umschaltung der Integrierer-Kondensatoren in drei Stufen vor: C; 0,1 C; 0,01 C, so erhält man den gewünschten Oktavbandpaß.

Ein dem hier demonstrierten Verfahren ähnliches wird bereits in /20/ angewendet. Mit einem Funktionsschalter können hier wahlweise

Tiefpässe oder Hochpässe eingestellt werden. Intern bewirkt der Funktionsschalter einen Austausch aller Kondensatoren durch Widerstände und umgekehrt. Das bedeutet: aus einem Zweipol mit dem Widerstand R wird ein Zweipol mit dem komplexen Widerstand $\frac{1}{sC}$ und umgekehrt. Jeder Term $\frac{1}{sRC}$ der Übertragungsfunktion wird daher in einen Term $\frac{1}{sRC}$ umgewandelt. Es wird also schaltungs-technisch die Tiefpaß-Hochpaß-Transformation durchgeführt. Über diese einfachste Reaktanztransformation wird allerdings nicht hinausgegangen, Bandpässe und Bandsperren werden auch hier durch Ketten- bzw. Parallelschaltung von Tiefpaß und Hochpaß erzeugt, stellen also keine optimale Ausnützung des Toleranzschemas dar.

Abschließend sei noch eine Bemerkung zum Schaltungsaufwand angefügt: Die Schaltung nach Bild 5.6 benötigt 8 Verstärker für einen Block 4. Grades. Es ist jedoch zu beachten, daß hier unmittelbar das Schaltbild für einen Analogrechner angegeben ist, bei einem speziellen Aufbau sind Einsparungen möglich, da z.B. Sinusoszillatoren auch mit nur einem Verstärker aufgebaut werden können. Außerdem ist ein integrierter Operationsverstärker für den Frequenzbereich heute billiger als ein Metallschichtwiderstand mit 0,5 % Toleranz; Einsparung von Verstärkern kann daher nur mit Rücksicht auf die Verlustleistung, kaum aus Preisrücksichten erforderlich sein.

5.2.2 Allpaßtransformation

Es wird jetzt die Funktionenklasse $F(s)$ nach Gl. (5.10) betrachtet:

$$F(s) = AP(s)$$

$AP(s)$ = Übertragungsfunktion eines
stabilen Allpasses

Die Allpaß-Übertragungsfunktion 1. Grades lautet allgemein:

$$AP(s) = \frac{s - \gamma_0}{s + \gamma_0} \quad , \quad \gamma_0 > 0 \quad (5.17)$$

Mit den Bezeichnungen von Abschnitt 5.1 wird

$$A(s) = \frac{s + \gamma_0}{s - \gamma_0} \quad s = \gamma_0 \frac{A + 1}{A - 1} \quad (5.18)$$

Die Berechnung der Koeffizienten der Übertragungsfunktion $H'(A)$ erfolgt durch Einsetzen der Funktion $s = s(A)$ in die gegebene Übertragungsfunktion und soll hier am Beispiel eines Blocks 2. Grades demonstriert werden.

Gegeben:

$$H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^2 + c_1 s + c_0}$$

$$H'(A) = \frac{b_2 \gamma_0^2 (A+1)^2 + b_1 \gamma_0 (A+1)(A-1) + b_0 (A-1)^2}{\gamma_0^2 (A+1)^2 + c_1 \gamma_0 (A+1)(A-1) + c_0 (A-1)^2}$$

$$= \frac{b_2' A^2 + b_1' A + b_0'}{A^2 + c_1' A + c_0'}$$

mit ersichtlichen Beziehungen für $b_2', b_1', b_0', c_1', c_0'$.

Die formelmäßigen Zusammenhänge sind für den Spezialfall $\gamma_0 = 1, b_2 = b_1 = 0, b_0 = 1$ bereits in /12/ angegeben.

Ein veränderbarer Tiefpaß entsteht nun durch Variation von γ_0 . Es sei $\gamma_0' = K \gamma_0$, dann folgt aus Gl. (5.18) für die neue Grenzfrequenz ω_D' :

$$A(j\omega_G) = e^{j2\arctan\left(\frac{\omega_D}{\gamma_0}\right)} \pm e^{j2\arctan\left(\frac{\omega_D'}{\gamma_0'}\right)}$$

$$\omega_D' = K \omega_D \quad (5.19)$$

Für die Tiefpaß-Hochpaßtransformation ist eine Vorzeichenumkehr von $A(s)$ erforderlich, man erkennt aus Gl. (5.18), daß dann

$$\frac{s}{\gamma_0} = \frac{A + 1}{A - 1}$$

übergeht in

$$\frac{s}{\gamma_0} = \frac{A' + 1}{A' - 1} \xrightarrow{A' = -A} \frac{A - 1}{A + 1} = \frac{\gamma_0}{s}$$

Das entspricht der bekannten Tiefpaß-Hochpaß-Transformation, eine Variation von γ_0 erlaubt wiederum die Variation der resultierenden

Grenzfrequenz.

Ersetzt man $AP(s)$ durch einen Allpaß 2. Grades:

$$AP_2(s) = \frac{s^2 - \gamma_1 s + \omega_o^2}{s^2 + \gamma_1 s + \omega_o^2} \quad (5.20)$$

so wird der Tiefpaß in einen Bandpaß transformiert (bei negativem Vorzeichen von $AP_2(s)$ in eine Bandsperre). Führt man andererseits an $AP(s)$ nach Gl. (5.17) die Tiefpaß-Bandpaß-Transformation nach Gl. (5.13) durch, so erhält man:

$$AP \left(\frac{s^2 + \omega_m^2}{\beta_o s} \right) = \frac{\frac{s^2 + \omega_m^2}{\beta_o s} - \gamma_o}{\frac{s^2 + \omega_m^2}{\beta_o s} + \gamma_o} = \frac{s^2 - \gamma_o \beta_o s + \omega_m^2}{s^2 + \gamma_o \beta_o s + \omega_m^2} = AP_2(s)$$

mit $\gamma_1 = \gamma_o \beta_o$, $\omega_o = \omega_m$

Die hier erläuterte Allpaßtransformation bringt also keine neuen Zusammenhänge; für die Grenzfrequenzen des resultierenden Filters gelten ebenfalls die Beziehungen (5.14, 5.15, 5.16).

Für die Realisierung kann man die in /27/ angegebenen Allpaßschaltungen verwenden, bei denen die gleichen Koeffizienten in Zähler und Nenner der Allpaßübertragungsfunktion nur durch jeweils ein Potentiometer eingestellt werden; dennoch sind die Schaltungen mit der Allpaßtransformation wesentlich aufwendiger als die mit der Reaktanztransformation. Sie bieten andererseits den Vorteil, daß die Tiefpaß-Hochpaß- bzw. die Bandpaß-Bandsperre-Transformation verhältnismäßig einfach durch eine Vorzeichenumkehr der Teilsysteme erreicht werden kann, während bei der Reaktanztransformation die Integrierer durch Differenzierer ersetzt werden müssen, die bezüglich der Realisierung wesentlich unangenehmer sind. Nur in diesem Falle dürften daher variable Filter nach dem Verfahren der Allpaßtransformation interessant sein.

5.2.3 Bemerkungen zur Stabilität

Unter dem Begriff "Stabilität" werden heute zwei völlig verschiedene Systemeigenschaften verstanden:

1. die Stabilität der Kennwerte gegenüber Alterung der Bauelemente und Schwankungen der Umgebungstemperatur
2. die Stabilität im systemtheoretischen Sinne.

Beides soll hier diskutiert werden.

Zu 1.: Diese Frage berührt zwei Punkte: die Empfindlichkeit der Übertragungsfunktion bezüglich der Schaltungsparameter und die Gleichspannungsdrift. Über die Empfindlichkeit RC-aktiver Schaltungen ist in jüngster Zeit eine Vielzahl von Arbeiten erschienen. Es seien hier nur zwei Arbeiten erwähnt /9, 19/. Grundsätzlich ist die Empfindlichkeit RC-aktiver Schaltungen schlechter als die von LC-Schaltungen, da die Dämpfungspole nicht durch Reflexion, sondern durch Auslöschung zweier gegenphasiger Signale an einem Summierer realisiert werden; andererseits lassen sich aber Widerstände und Kondensatoren sehr stabil herstellen. Auffallend ist jedoch, daß kommerzielle Geräte meist nur Dämpfungspole bei $\omega = 0$ und im Unendlichen aufweisen, d.h. es werden nur Polynomtiefpässe und die daraus durch Transformation gewonnenen Hochpässe realisiert.

Für das in dieser Arbeit eingeführte neue Verfahren zum Aufbau einstellbarer selektiver Filter gelten bezüglich der Koeffizienten b_{μ}' , c_{ν}' nach Gl. (5.1) dieselben Überlegungen wie für die nicht veränderbaren RC-aktiven Filter, neu hinzugekommen ist die Forderung nach dem Gleichlauf der Potentiometer für die Einstellung der Koeffizienten β_0 , ω_m in den Teilsystemen.

Um den Einfluß nicht idealen Gleichlaufs zu untersuchen, betrachten wir noch einmal den transformierten Block 2. Grades nach Bild 5.6. In Erweiterung der dortigen Anordnung wird angenommen, daß jeweils eines der beiden Potentiometer um den Faktor r bzw. k , die beide ungefähr eins sind, von seinem Sollwert abweicht, Bild 5.9. Der dargestellte Block ist ein Teilblock 4. Grades, geeignet zur Realisierung eines einstellbaren Bandpasses in Kaskadenschaltung. Der entsprechende Teilblock 2. Grades für einen einstellbaren Tiefpaß ist ein Sonderfall hiervon mit $\omega_m \equiv 0$.

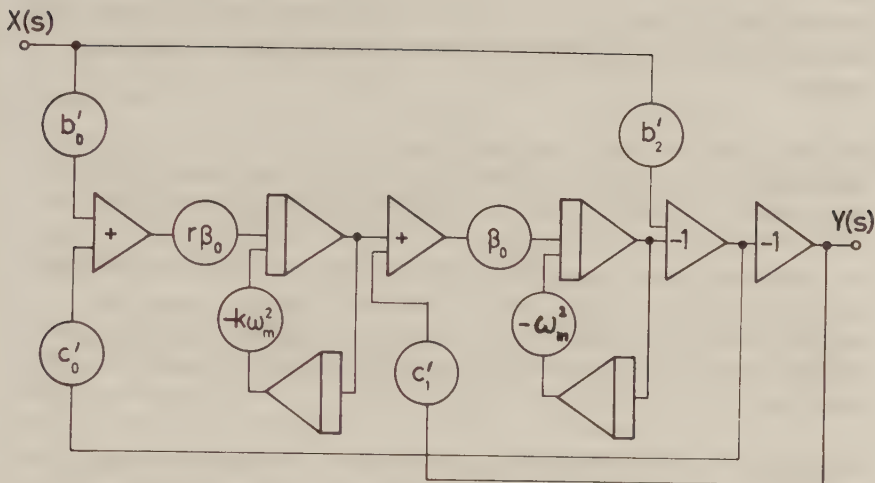


Bild 5.9: Block 4. Grades für ein einstellbares Bandpaß-Filter mit nicht ideal gleichlaufenden Einstellpotentiometern

Die Analyse der Schaltung führt auf die Übertragungsfunktion:

$$B(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b'_2 s^4 + s^2 \left(b'_2 \omega_m^2 (1+k) + b'_0 r \beta_0^2 \right) + k b'_2 \omega_m^4}{s^4 + s^3 c'_1 \beta_0 + s^2 \left((k+1) \omega_m^2 + c'_0 r \beta_0^2 \right) + s c'_1 \beta_0 k \omega_m^2 + k \omega_m^4} \quad (5.21)$$

Es wird angenommen, daß die Koeffizienten b'_u , c'_v exakt eingestellt sind, d.h. für $k = r = 1$ ist $B(s)$ mit der gewünschten Übertragungsfunktion identisch.

Für die Nullstellen des Zählers ergibt sich:

$$s_{01,2}^2 = - \left[\frac{(1+k) \omega_m^2}{2} + \frac{b'_0 r \beta_0^2}{2 b'_2} \right] \pm \sqrt{\left[\frac{(1+k) \omega_m^2}{2} + \frac{b'_0 r \beta_0^2}{2 b'_2} \right]^2 - k \omega_m^4}$$

$$= - \left[\frac{(1+k) \omega_m^2}{2} + \frac{b'_0 r \beta_0^2}{2 b'_2} \right] \pm \sqrt{\left[\frac{(1-k) \omega_m^2}{2} \right]^2 + \frac{(1+k) \omega_m^2 b'_0 r \beta_0^2}{2 b'_2} + \left[\frac{b'_0 r \beta_0^2}{2 b'_2} \right]^2}$$

Man erkennt aus der ersten Zeile, daß der Wurzelausdruck dem Betrage nach kleiner ist als der vor der Wurzel stehende Summand, aus der zweiten Zeile, daß der Radikand stets positiv ist. Das bedeutet:

Auch bei nicht idealem Gleichlauf der Potentiometer liegen die Dämpfungspole der Schaltung stets bei reellen Frequenzen. Diese Eigenschaft ist sehr wichtig für scharf selektierende Filter.

Der zweite eingangs angesprochene Punkt ist ein allgemeines Problem galvanisch gekoppelter Verstärker. Der besonders hohe Aufwand für sehr driftarme Verstärker, wie er in guten Analogrechnern betrieben wird, ist für gewöhnliche Filterschaltungen nicht vertretbar.

Andererseits sind die Anforderungen recht hoch: die Drift eines Verstärkers innerhalb der Rückkopplungsschleife erscheint um die Gleichspannungs-Schleifenverstärkung verstärkt am Ausgang, diese kann für einen Block 2. Grades in der Größenordnung von 10 liegen. Außerdem wird durch Veränderung der Beschaltungswiderstände wegen des endlichen Eingangsstromes der Verstärker eine Gleichspannungsverschiebung erzeugt, die vom gerade eingestellten Filter abhängt. Bandpässe und Hochpässe sind hier unkritisch, die Gleichspannungs-Schleifenverstärkung ist gering, die auftretende Offsetspannung ist stets klein gegenüber dem Aussteuerungsbereich der Verstärker. Außerdem erlaubt das Toleranzschema dieser beiden Filtertypen eine kapazitive Auskopplung des Ausgangssignales.

Bei Tiefpässen und Bandsperren ist erhöhter Aufwand erforderlich. Es ist jedoch nicht notwendig, jeden einzelnen Verstärker besonders driftarm auszulegen. Es genügt, mit einem schmalbandigen und extrem driftarmen Verstärker den ganzen Block zu regeln; analog zum chopper-stabilisierten Verstärker erhält man dann einen chopper-stabilisierten Filterblock. (Es sei hier am Rande vermerkt, daß selbst ein Teil der kommerziellen passiven Filter keinen Gleichspannungsdurchgang haben, da Anpassungsübertrager verwendet werden; der zunächst hoch erscheinende Aufwand für einen einstellbaren Tiefpaß mit Gleichspannungsdurchgang erscheint dann in einem anderen Licht.)

Zu 2.: Stabilität im systemtheoretischen Sinne

Nach den Ausführungen von Abschnitt 5.1 ist ein nach dem beschriebenen Verfahren aufgebautes einstellbares Filter stabil. Jedoch treten beim praktischen Aufbau selbstverständlich Abweichungen von der gewünschten idealen Konfiguration auf.

Zunächst soll wiederum der Fall betrachtet werden, daß der Gleichlauf der Mehrfachpotentiometer zur Einstellung von β_0 und ω_m nicht exakt herstellbar ist. Wir untersuchen dazu den Nenner der Übertragungsfunktion $B(s)$ nach Gl. (5.21).

Wenn die Übertragungsfunktion stabil sein soll, so muß der Nenner von $B(s)$ ein Hurwitzpolynom sein, dh. der Quotient aus dem geraden und ungeraden Anteil muß eine Reaktanzzweipolfunktion sein. Notwendig und hinreichend hierfür ist die Bedingung, daß die Nullstellen und Polstellen alle auf der imaginären Achse der s -Ebene liegen, einfach sind und sich gegenseitig trennen.

$$N(s) = G(s) + U(s)$$

$$U(s) = s c'_1 \beta_0 (s^2 + k \omega_m^2) \quad (5.22)$$

$$\text{Nullstellen: } s_{01} = 0$$

$$s_{02,3} = \pm j \omega_m \sqrt{k}$$

$$\begin{aligned} G(s) &= s^4 + s^2 \left((k+1) \omega_m^2 + c'_0 r \beta_0^2 \right) + k \omega_m^4 \\ &= (s^2 + \omega_m^2) (s^2 + k \omega_m^2) + s^2 c'_0 r \beta_0^2 \end{aligned} \quad (5.23)$$

Zur Untersuchung der Wurzeln von $G(s)$ wird Bild 5.10 herangezogen.

In der Darstellung ist $k < 1$ angenommen. Für $k > 1$ vertauschen sich die beiden Nullstellen von $(s^2 + \omega_m^2) \cdot (s^2 + k \omega_m^2)$.

Man entnimmt dem Bild, daß für die Wurzeln von $G(s^2)$ gilt:

$$-k \omega_m^2 < s_{\infty 2}^2 < 0$$

$$s_{\infty 1}^2 < -k \omega_m^2$$

Ein Vergleich mit den Wurzeln von $U(s)$ zeigt, daß für beliebige $k > 0$ und $r > 0$ $N(s)$ stets Hurwitzpolynom ist, d.h. das System

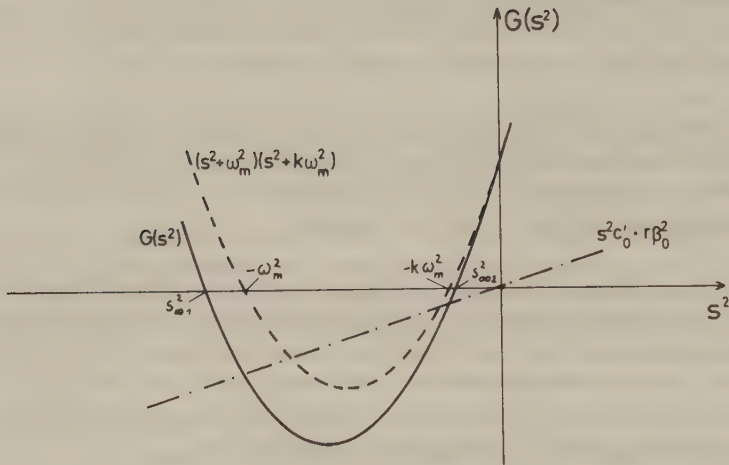


Bild 5.10: Zur Bestimmung der Wurzeln von $G(s^2)$

ist auch dann stabil, wenn der Gleichlauf der Mehrfachpotentiometer schlecht ist.

Eine weitere Schwierigkeit liegt im Frequenzgang der Operationsverstärker. Während die Integrierer nur insofern vom Ideal abweichen, als ihre Verstärkung bei Gleichspannung endlich ist, macht sich bei den als Summierer geschalteten Verstärkern die obere Grenzfrequenz bemerkbar. Selbst wenn man annimmt, daß für den Frequenzgang der Summierverstärker nur eine Zeitkonstante maßgeblich ist, daß also der Frequenzgang des Betrages jenseits der 3dB-Grenzfrequenz mit 20dB/dek abfällt, so ist doch die Phasendrehung an der 3dB-Grenzfrequenz bereits 45° , eine Rückkopplungsschleife über mehrere Verstärker könnte daher zur Instabilität führen. Jedoch ist die Schaltung sehr günstig: Wie man Bild 5.9 entnimmt, wird sowohl die Rückkopplungsschleife für den Koeffizienten c'_1 als auch die für den Koeffizienten c'_0 über mindestens einen Integrierer geschlossen; dessen Frequenzgang stellt sicher, daß der Betrag der Schleifenverstärkung unter 0dB gefallen ist, ehe die Phasendrehung der Summierer gefährlich werden könnte. Es muß die Bedingung eingehalten werden, daß die 0-dB-Frequenz der Inte-

größer klein ist gegen die 3dB-Grenzfrequenz der Summierer - eine an sich selbstverständliche Forderung, denn innerhalb des für die Schaltung interessierenden Frequenzbereiches darf die Verstärkung der Summierer noch nicht abfallen.

Ein ganz anderes Problem, das allerdings allen RC-aktiven Schaltungen gemeinsam und nicht spezifisch für das hier vorgestellte Verfahren ist, liegt in den Nichtlinearitäten, bedingt durch den endlichen Aussteuerungsbereich der aktiven Elemente. Man kann zwei Ursachen der Übersteuerung unterscheiden: Übersteuerung durch zu große und Übersteuerung durch zu steile Eingangssignale. Der zweite Effekt ist weniger bekannt, aber deshalb nicht weniger kritisch. Zur Erläuterung dient Bild 5.11.

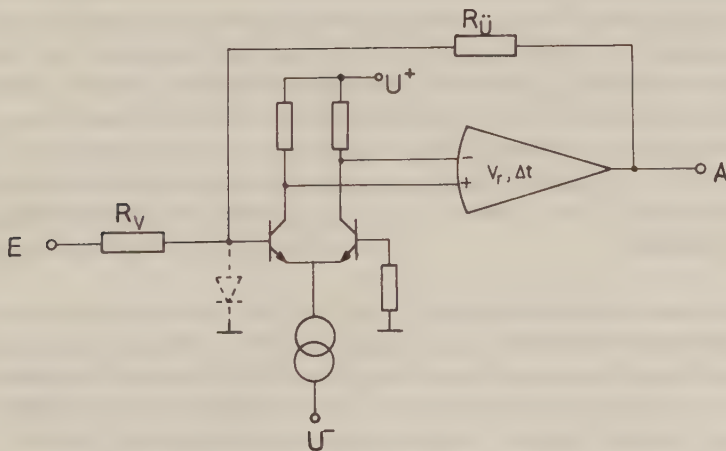


Bild 5.11: Übliche Schaltung integrierter Operationsverstärker

Die Vorstufe des Verstärkers ist getrennt herausgezeichnet, der restliche Teil des Verstärkers habe die Verstärkung v_r und die Laufzeit Δt . Legt man an den Eingang ein sehr hochfrequentes Eingangssignal, z.B. einen Rechteckimpuls kurzer Anstiegszeit, so vergeht die Laufzeit Δt ehe über den Rückkopplungswiderstand $R_{\bar{U}}$ die Gegenkopplung wirksam werden kann; die Vorstufe wird

übersteuert und der nachfolgende Verstärkerteil dann ebenfalls.

Als Folge der Übersteuerung treten gewöhnlich interne Strombegrenzungen in Erscheinung, der Einschwingvorgang am Ausgang des Verstärkers nimmt dann eine sägezahnähnliche Form mit dreiecksartigen Überschwingern an. Dieses Ausgangssignal hat mit dem Eingangssignal wenig zu tun, wird aber an die nachfolgende Schaltung weitergegeben. Man vermeidet derartige Effekte durch ein sehr einfaches Vorfilter (RC-Glied), das sich im interessierenden Frequenzbereich noch nicht bemerkbar macht und den Verstärker vor zu steilen Eingangssignalen schützt. Ein Schutz gegen Zerstörung ist die im Bild 5.11 gestrichelt eingezeichnete Diode ("latch-up-protection" /17/).

Ist ein Verstärker, durch welche Ursache auch immer, im Zustand der Übersteuerung, so wird die Beschreibung des weiteren Zeitverhaltens nahezu unmöglich, es sind zu viele Einflüsse zu berücksichtigen, die kaum näherungsweise erfaßbar sind. Man vermeidet die Übersteuerung durch zu große Eingangssignale durch zusätzliche Beschaltung der Verstärker mit nichtlinearen Gegenkopplungen, durch die das Ausgangssignal auf einen Bereich begrenzt wird, in dem der Verstärker noch arbeitet. Eine Begrenzung nur des Eingangssignales ist nicht ausreichend, da intern trotzdem Übersteuerungen auftreten können.

Stattet man in der Schaltung nach Bild 5.9 alle Verstärker mit solchen Begrenzerschaltungen aus, so ist zur vollständigen Beschreibung des Systems ein Satz von sieben nichtlinearen Zustandsdifferentialgleichungen erforderlich. (Die Schaltung enthält acht Verstärker, jedoch ist eine Begrenzerschaltung am letzten Summierer überflüssig, da hier nur das Ausgangssignal des vorhergehenden invertiert wird.) Die allgemeine Lösung dieses Differentialgleichungssystems und die Klärung der Frage, ob die Schaltung global asymptotisch stabil ist, d.h. ob der Zustandsvektor $\underline{x}$ von jeder Anfangslage aus nach Abschalten der Erregung in die Ruhelage $\underline{x} = \underline{0}$ zurückkehrt, erscheint bei sieben in der Schaltung verteilten Nichtlinearitäten aussichtslos.

Es besteht die Vermutung, daß das System global asymptotisch stabil ist. Der Verfasser hat bei umfangreichen empirischen Versuchen

am Analogrechner kein Gegenbeispiel finden können. Das heißt, wenn man die beiden Schutzmaßnahmen gegen zu steile und gegen zu große Eingangssignale anwendet, arbeitet die beschriebene Schaltung nach den bisherigen Erfahrungen einwandfrei. Es sei zur Entschuldigung dieses heuristischen Verfahrens abschließend nochmals bemerkt, daß das Problem der Nichtlinearitäten allen aktiven Schaltung gemeinsam und nicht spezifisch für die hier behandelte Schaltung ist.

5.3 Anwendung des Transformationsverfahrens auf Abtastfilter

5.3.1 Grundlagen

Wie erstmalig Gibbs /28/ in dieser Deutlichkeit formulierte, läßt sich jedes Approximationsproblem für einen gewünschten Frequenzgang linearer zeitdiskreter Systeme auf ein entsprechendes Problem für kontinuierliche Systeme übertragen und umgekehrt. Die Realisierung digitaler Filter wird stets durch aktive Schaltungen erfolgen; Leitungsnetzwerke, die durch sehr ähnliche Beziehungen beschrieben werden wie digitale Filter /29/, dürften auf die Hochfrequenztechnik beschränkt bleiben. Man kann daher für die im Abschnitt 5.2 beschriebenen Verfahren zur Synthese RC-aktiver einstellbarer Filter entsprechende Verfahren zur Synthese einstellbarer digitaler Filter angeben.

Ersetzt man in Bild 5.1 die kontinuierlichen Teilsysteme mit der Übertragungsfunktion $1/A(s)$ durch diskrete mit der Übertragungsfunktion $1/A(z)$, so wird die Übertragungsfunktion des (jetzt diskreten) Gesamtsystems:

$$H(z) = \frac{\sum_{\mu=0}^m b_{\mu} z^{\mu}}{\sum_{v=0}^n c_v z^v} = H'(A(z)) = \frac{\sum_{\mu=0}^{m'} b'_{\mu} (A(z))^{\mu}}{\sum_{v=0}^{n'} c'_v (A(z))^v} \quad (5.24)$$

Es muß gelten $m \leq n$ und $m' \leq n'$, ferner sei $c_n = 1$ und $c'_{n'} = 1$ angenommen, was durch Kürzen stets erreichbar ist.

Diese allgemeinen digitalen Verzweigungsnetzwerke werden ebenfalls bereits in /12/ angegeben.

Der Kreis reeller Frequenzen in der z -Ebene ist wegen der Definition $z = e^{sT}$ der Einheitskreis; er wird wegen der Periodizität des Frequenzganges digitaler Filter in jedem Frequenzintervall $r \cdot f_A \leq f \leq (r+1)f_A$ einmal umlaufen, dabei ist $f_A = \frac{1}{T}$ die Abtastfrequenz, r eine ganze Zahl. Die Parametrierung des Einheitskreises mit der Frequenz f ist linear.

Hinsichtlich der Realisierbarkeit und der Stabilität der Übertragungsfunktion $H(z)$ gelten entsprechende Überlegungen wie bei kontinuierlichen Systemen für $H(s)$: das Gesamtsystem ist realisierbar, wenn die Teilsysteme mit der Übertragungsfunktion $1/A(z)$ realisierbar sind, und es ist kausal und stabil, wenn $H(z)$ den hierfür bekannten Bedingungen genügt, d.h. wenn der Zähler von $H(z)$ höchstens vom Grade des Nenners ist und wenn alle Wurzeln des Nennerpolynoms innerhalb des Einheitskreises liegen. Die Teilsysteme selbst brauchen auch hier nicht stabil zu sein. Wählt man für $1/A(z)$ eine gebrochen rationale Funktion ersten Grades,

$$\frac{1}{A(z)} = \frac{d_1 z + d_0}{e_1 z + e_0} \quad z = \frac{d_0 A - e_0}{-d_1 A + e_1} \quad (5.25)$$

so ist die Darstellung einer gegebenen rationalen Übertragungsfunktion $H(z)$ als Funktion $H'(A(z))$ der inversen Teilübertragungsfunktion immer möglich. Diese Darstellung bedeutet eine Abbildung der z -Ebene in die $A(z)$ -Ebene, der Einheitskreis der z -Ebene wird in den Kreis reeller Frequenzen in der A -Ebene abgebildet.

In völliger Analogie zu dem bereits ausführlich behandelten Verfahren zur Synthese kontinuierlicher selektiver Filter mit einstellbaren Grenzfrequenzen werden für die Anwendung auf digitale Filter Funktionenklassen $F(z)$ mit folgenden Eigenschaften gesucht:

1. Alle Funktionen aus der Klasse $F(z)$ sind rationale Funktionen mit reellen Koeffizienten.
2. Jede Funktion aus der Klasse $F(z)$ ist Übertragungsfunktion eines realisierbaren digitalen Filters, das nicht notwendig stabil sein muß.
3. Der Einheitskreis der z -Ebene wird durch jede Funktion aus

der Klasse $F(z)$ auf denselben Kreis reeller Frequenzen in der $\frac{1}{F(z)}$ -Ebene abgebildet, der Kreis wird für wachsende ω stets in derselben Orientierung umlaufen.

Auch hier kann man zwei Funktionenklassen mit den gewünschten Eigenschaften angeben:

$$1. F(z) = \pm AP(z) \quad (5.26)$$

$AP(z)$ ist die Übertragungsfunktion eines beliebigen digitalen Allpasses. Die Allpässe müssen entweder alle stabil oder alle instabil sein; es werden im folgenden nur stabile betrachtet. Die Erweiterung von Gl. (5.26) um zwei Konstante wie bei Gl. (5.10) ist möglich, bringt aber keinen Vorteil und ist daher unterlassen worden. Der Kreis reeller Frequenzen in der $\frac{1}{F(z)}$ -Ebene ist der Einheitskreis; er wird im Frequenzintervall $r \cdot f_A \leq f \leq (r+1)f_A$ n-mal umlaufen, wenn $AP(z)$ von n-tem Grade ist.

$$2. F(z) = J(z) \quad (5.27)$$

$J(z)$ ist eine Funktion, die durch bilineare Transformation $s = \frac{z-1}{z+1}$ aus einer Reaktanzfunktion $R(s)$ entsteht. $J(z)$ ist für reelle Frequenzen $z = e^{j\varphi}$ rein imaginär und hat auch sonst alle Eigenschaften der Reaktanzfunktionen, wenn man in den hierfür bekannten Regeln ω durch $\tan(\frac{\varphi}{2})$ ersetzt.

Mögliche Funktionen $J(z)$ vom zweiten Grade zeigt Bild 5.12.

Die Erweiterung von Gl. (5.27) um eine additive Konstante sowie ein wahlweise positives oder negatives Vorzeichen vor $J(z)$ (entsprechend Gl. (5.9) für kontinuierliche Systeme) ist auch hier möglich, bringt aber ebenfalls keinen Vorteil und ist daher unterlassen worden.

Der Kreis reeller Frequenzen in der $\frac{1}{F(z)}$ -Ebene ist die imaginäre Achse, sie wird im Frequenzintervall $r f_A \leq f \leq (r+1)f_A$ n-mal durchlaufen, wenn $J(z)$ von n-tem Grade ist.

Für den Aufbau eines selektiven digitalen Filters mit einstellbaren Grenzfrequenzen geht man nun wie folgt vor:

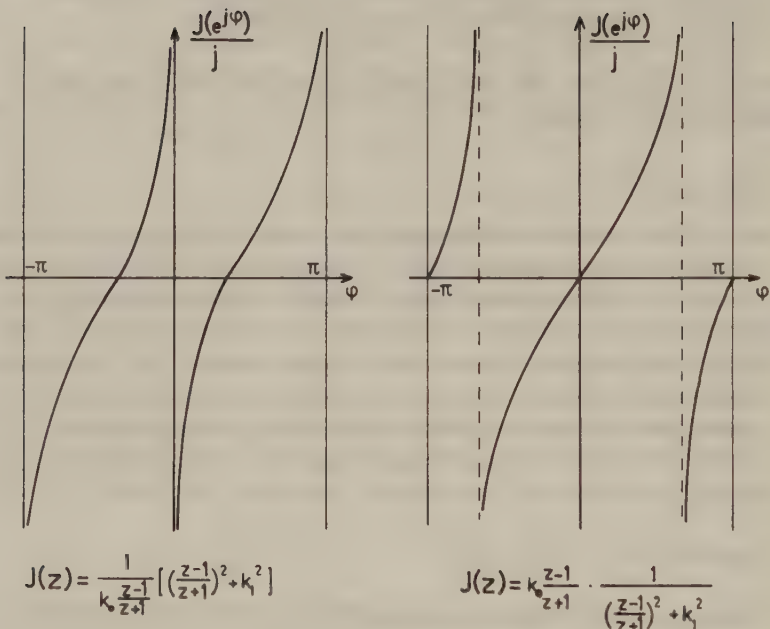


Bild 5.12: Die beiden möglichen Funktionen $J(z)$ vom zweiten Grade

Man wählt eine geeignete Übertragungsfunktion $H(z)$ eines selektiven digitalen Filters, z.B. eines Tiefpasses. Aus einer der beiden möglichen Funktionenklassen $F(z)$ greift man eine spezielle Funktion ersten Grades, $F_1(z) = \frac{1}{A(z)}$, heraus und bestimmt durch Einsetzen der inversen Funktion $z = z(A)$ in die gegebene Übertragungsfunktion $H(z)$ die Koeffizienten b'_μ , c'_ν der Funktion $H'(A(z)) = H(z)$. Mit diesen Koeffizienten wird das Gesamtsystem in einer der Strukturen nach Bild 5.1 aufgebaut, wobei die Realisierung der Teilsysteme mit der Übertragungsfunktion $1/A(z)$ so zu erfolgen hat, daß ihre Parameter in einer für alle Teilsysteme identischen Weise verändert werden können, jedoch jede der einstellbaren Teilübertragungsfunktion eine Funktion aus der Klasse $F(z)$ bleibt. Die Veränderung dieser Parameter bedeutet eine Verschiebung der Grenzfrequenzen des resultierenden Filters. Das Verfahren ist völlig identisch mit dem bereits für kontinuierliche Systeme beschrieben.

Der Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der Teilsysteme und dem Frequenzgang des Gesamtsystems wird im folgenden untersucht werden.

5.3.2 Allpaßtransformation

Die Übertragungsfunktion eines digitalen Allpasses lautet allgemein:

$$AP_r(z) = \frac{\sum_{\rho=0}^r \gamma_{\rho} z^{\rho}}{\sum_{\rho=0}^r \gamma_{r-\rho} z^{\rho}} \quad (5.28)$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann $\gamma_0 = 1$ gesetzt werden. Der Allpaß ist stabil, wenn alle Wurzeln des Nennerpolynoms

$\sum_{\rho=0}^r \gamma_{r-\rho} z^{\rho}$ innerhalb des Einheitskreises liegen.

Ähnlich wie die Reaktanztransformation bei kontinuierlichen Filtern (Abschnitt 5.2.1) ist für digitale Filter die Allpaßtransformation sehr einfach, da $F(z) = \frac{1}{z}$ bereits die Übertragungsfunktion eines stabilen Allpasses darstellt. Man wählt also zweckmäßig

$$A(z) = z \quad (5.29)$$

und die Koeffizienten b'_{μ} , c'_{ν} der Übertragungsfunktion $H'(A(z))$ nach Gl. (5.24) sind identisch mit den Koeffizienten b_{μ} , c_{ν} . Die Allpaßtransformation bei digitalen Filtern ist formal der Reaktanztransformation bei kontinuierlichen Filtern sehr ähnlich.

Die Allpaßtransformation wurde in anderem Zusammenhang, nämlich für den Entwurf eines digitalen Filters mit Hilfe einer gegebenen Übertragungsfunktion eines normierten Tiefpasses, ähnlich wie es bei kontinuierlichen Filtern seit langem gehandhabt wird, erstmalig von Constantinides /30,31/ angegeben. Die dort abgeleiteten Beziehungen für den Zusammenhang zwischen den Parametern des Allpasses und den Grenzfrequenzen des resultierenden Filters wurden in /32/ noch in übersichtlicherer Form zusammengefaßt und können hier unmittelbar übernommen werden.

Die komplexe Variable der transformierenden Allpaßfunktion wird im folgenden mit ξ bezeichnet, um Verwechslungen mit der Variablen z des Ausgangsfilters zu vermeiden.

Auf dem Einheitskreis gilt:

$$\begin{aligned} z &= e^{j2\pi f/f_A} = e^{j\varphi} \\ \xi &= e^{j2\pi f'/f_A} = e^{j\psi} \end{aligned}$$

Die Bezugsfrequenz bei Bandpässen (Bandsperrern) ist die Abbildung des Punktes $f = 0$ ($f = f_A/2$) beim Ausgangstiefpaß und wird mit f_B bezeichnet.

Man erhält im Einzelnen folgende Beziehungen:

Für die Tiefpaß-Tiefpaß-Transformation:

$$\frac{1}{z} = AP(\xi) = \frac{\gamma_1 \xi + 1}{\xi + \gamma_1}, \quad \gamma_1 \text{ reell, } |\gamma_1| < 1 \quad (5.30)$$

Auf dem Einheitskreis gilt:

$$e^{j\varphi} = \frac{e^{j\psi} + \gamma_1}{\gamma_1 e^{j\psi} + 1} = e^{j 2 \arctan \left[\frac{1 - \gamma_1}{1 + \gamma_1} \tan \frac{\psi}{2} \right]}$$

Daraus folgt für die Beziehung zwischen den Frequenzen f und f' :

$$f' = \frac{f_A}{\pi} \arctan \left[\frac{1 + \gamma_1}{1 - \gamma_1} \tan \frac{\pi f}{f_A} \right] \quad (5.31)$$

Die Gleichung (5.31) liefert bei bekannten Werten für f_D , f_S die Zahlenwerte f'_D , f'_S für das resultierende Filter.

Man erkennt, daß für ein beliebiges f_D durch Variation von γ_1 im Bereich $|\gamma_1| < 1$ jedes beliebige f'_D im Bereich $0 < f'_D < f_A/2$ eingestellt werden kann.

Für die Tiefpaß-Hochpaß-Transformation:

$$\frac{1}{z} = AP(\xi) = - \frac{\gamma_1 \xi + 1}{\xi + \gamma_1}, \quad |\gamma_1| \text{ reell, } |\gamma_1| < 1 \quad (5.32)$$

Für die Beziehung zwischen den Frequenzen f und f' erhält man daraus:

$$f' = \frac{f_A}{\pi} \arctan \left(\frac{1 + \gamma_1}{1 - \gamma_1} \tan \left(\pi f / f_A + \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (5.33)$$

Auch hier kann durch Verändern von γ_1 im zulässigen Bereich $|\gamma_1| < 1$ die Grenzfrequenz im gesamten Basisband $0 < f' < f_A/2$ verschoben werden.

Für die Tiefpaß-Bandpaß-Transformation:

$$\frac{1}{z} = AP(\xi) = - \frac{\alpha \xi^2 - \beta(1+\alpha) \xi + 1}{\xi^2 - \beta(1+\alpha) \xi + \alpha} \quad (5.34)$$

α, β reell, $|\alpha|, |\beta| < 1$

Für das resultierende Filter erhält man aus Gl. (5.34) nach einigen trigonometrischen Umformungen:

die Bezugsfrequenz:

$$f'_B = \frac{f_A}{\pi} \arccos \beta \quad (5.35)$$

und die Bandbreite:

$$B = f'_{+D} - f'_{-D} = \frac{f_A}{\pi} \arctan \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \tan \frac{\pi f_D}{f_A} \right) \quad (5.36)$$

Außerdem gilt für den Zusammenhang zwischen der Bezugsfrequenz f'_B und den Bandgrenzen f'_{+D}, f'_{-D} :

$$\cos \frac{2\pi f'_B}{f_A} = \frac{\cos \left(\pi (f'_{+D} + f'_{-D}) / f_A \right)}{\cos \left(\pi (f'_{+D} - f'_{-D}) / f_A \right)} \quad (5.37)$$

Wie bei den kontinuierlichen Filtern (Gl. 5.15, 5.16) kann man die Koeffizienten der Teilsysteme so festlegen, daß durch einen der beiden nur die Bezugsfrequenz, durch den anderen nur die Bandbreite bestimmt wird. Für den Variationsbereich gilt $0 < f'_A < f_A/2$ und $0 < B < f_A/2$.

Für die Tiefpaß-Bandsperre-Transformation:

$$\frac{1}{z} = AP(\xi) = \frac{\alpha \xi^2 - \beta(1+\alpha) \xi + 1}{\xi^2 - \beta(1+\alpha) \xi + \alpha} \quad (5.38)$$

$$f'_B = \frac{f_A}{2\pi} \arccos \beta \quad (5.39)$$

$$B = f_A/2 - \left(f'_{+D} - f'_{-D} \right) = \frac{f_A}{\pi} \arctan \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \tan \frac{\pi f_D}{f_A} \right) \quad (5.40)$$

5.3.3 Zwei praktisch aufgebaute Geräte

Zur Demonstration und meßtechnischen Kontrolle der im letzten Abschnitt erläuterten Eigenschaften einstellbarer digitaler Filter wurden zwei Geräte in Abtasthalte-Technik /24, 32/ aufgebaut.

In dem ersten Gerät wurde die Variation der Bezugsfrequenz gemäß Gl. (5.35) ausgenutzt, auf die Variation der Bandbreite nach Gl. (5.36) wurde verzichtet. Es entstand so ein Bandpaß konstanter Bandbreite und variabler Mittenfrequenz. Bild 5.13 zeigt das Blockschaltbild.

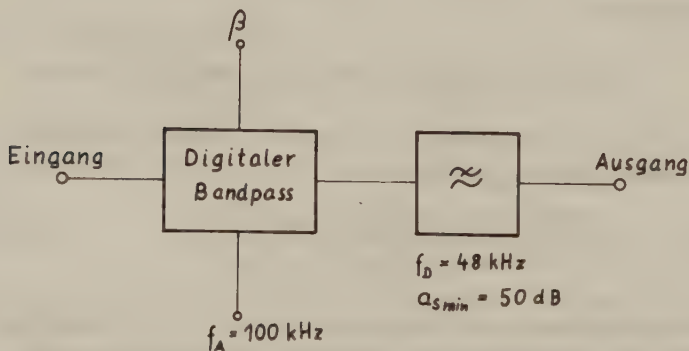


Bild 5.13: Blockschaltbild des variablen Bandpaßfilters

Auf ein Eingangstiefpaßfilter, wie es in Bild 4.1 dargestellt ist, wurde verzichtet, da die gewählte Abtastfrequenz mit 100 kHz ziemlich hoch liegt. Das passive LC-Filter am Ausgang unterdrückt die Spektralanteile außerhalb $|f| < f_A/2$ und hat im Durchlaßbereich einen Frequenzgang, der die Funktion $(\pi f/100 \text{ kHz})/(\sin \pi f/100 \text{ kHz})$ approximiert. Die Verzerrung am Ausgang des digitalen Filters aufgrund der Interpolation nullter Ordnung durch die Abtasthaltglieder wird dadurch kompensiert.

Das Blockschaltbild des digitalen Filters zeigt Bild 5.14. Dabei ist in den Allpässen der Koeffizient β variabel. Das ist hier dadurch realisiert worden, daß die Beschaltungswiderstände des vorausgehenden Summierverstärkers umgeschaltet werden.

Als Basistiefpaß wurde das Cauer-Filter CO42535a /8/ mit $a_{Dmax} = 0,28$ dB und $a_{Smin} = 40,3$ dB verwendet. Es wurde bilinear in die z-Ebene transformiert, so, daß die Durchlaßgrenze bei $f_D = 25$ kHz $= f_A/4$ liegt. Man erhält die Übertragungsfunktion:

$$H_{TP}(z) = 0,2183 \frac{z^2 + 1,785z + 1}{z^2 - 0,3574z + 0,1838} \\ \cdot 0,5738 \frac{z^2 + 1,104z + 1}{z^2 + 0,1057z + 0,734}$$

Für den Allpaß nach Gl. 5.34 wurden die Konstanten α , β wie folgt gewählt:

$$\alpha = \tan \frac{\pi}{5} = 0,7265 \\ |\beta| \leq 0,972$$

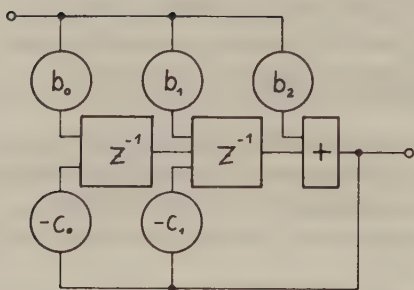
Man erhält damit die Bandbreite $B = 5$ kHz (Gl. 5.36) und die Grenzfrequenzen (Gl. (5.35, 5.37)).

$$2 \text{ kHz} \leq f_{-D} \leq 43 \text{ kHz} \\ 7 \text{ kHz} \leq f_{+D} \leq 48 \text{ kHz}$$

Der Aufbau der Abtasthalteglieder erfolgte in Serienkonfiguration, Schaltung S5 in /32/. Da das gewählte Basis-Tiefpaßfilter vom vierten Grade ist, ist der veränderbare Bandpaß ein Filter achten Grades. Es wurde durch Kaskadenschaltung zweier Blöcke nach Bild 5.14 aufgebaut.

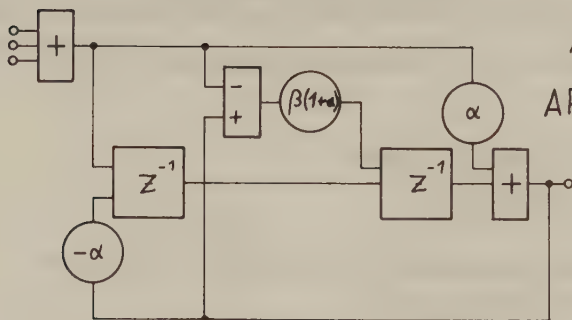
Die Bilder 5.15 bis 5.17 zeigen einige Meßergebnisse (selektiv gemessen mit dem Hewlett-Packard Wave Analyzer 3590A).

Der Frequenzgang des Betrages entspricht recht gut dem theoretisch abgeleiteten Verhalten. Kleinere Abweichungen an den Rändern des Variationsbereiches sind auf die endliche Genauigkeit der analogen Bauelemente zurückzuführen. Das Filter entwickelt jedoch ein sehr starkes Eigenrauschen, das seine praktische Ver-



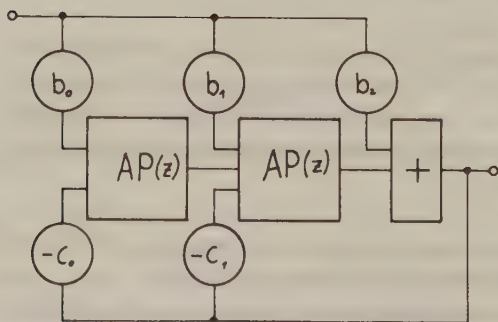
Tiefpass

$$H_{TP}(z) = \frac{b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^2 + c_1 z + c_0}$$



Allpass

$$AP(z) = -\frac{\alpha z^2 - \beta(1+\alpha)z + 1}{z^2 - \beta(1+\alpha)z + \alpha}$$



Bandpass

$$H_{BP}(z) = H_{TP}\left(\frac{1}{AP(z)}\right)$$

Bild 5.14: Aufbau eines Bandpasses nach der Methode der Allpasstransformation

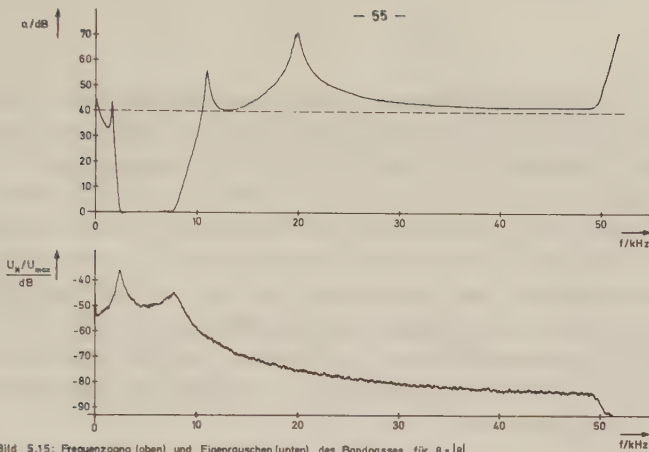


Bild 5.15: Frequenzgang (oben) und Eigenrauschen (unten) des Bandpasses für $\beta = |\beta|_{max}$

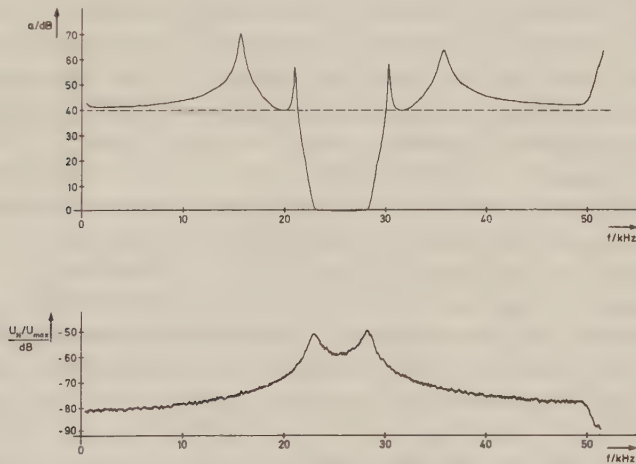


Bild 5.16: Frequenzgang (oben) und Eigenrauschen (unten) des Bandpasses für $\beta = 0$

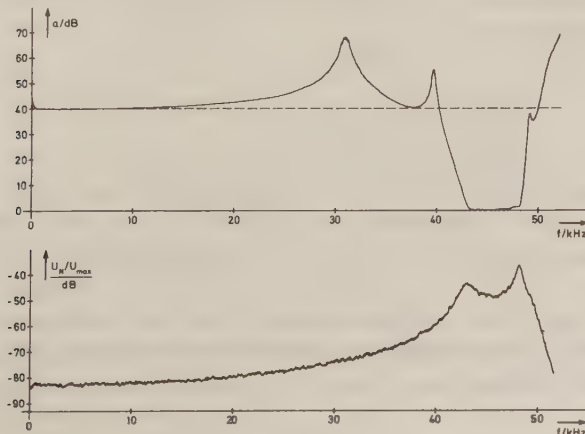


Bild 5.17: Frequenzgang (oben) und Eigenrauschen (unten) des Bandpasses für $\beta = -|\beta|_{max}$

wendung in dieser Form unmöglich macht. Der Grund hierfür liegt in den Verstärkern: der Operationsverstärker μA 702 hat in der verwendeten breitbandigen Schaltung ein sehr starkes Eigenrauschen. Dieses Rauschen, an vielen Stellen in der Schaltung erzeugt, macht sich am Ausgang des Filters besonders in der Nähe der Pole der Übertragungsfunktion bemerkbar, d.h. an den Rändern des Durchlaßbereiches, und zwar um so stärker, je steiler die Filterflanken sind, je dichter also die Pole am Einheitskreis liegen. Das Rauschen macht sich hier in der gleichen Form bemerkbar wie bei rein digitalen Filtern das in jedem Multiplizierer erzeugte Rundungsrauschen / 33/.

Als zweites Gerät wurde ein allgemeines Filter aufgebaut. Im Unterschied zu dem beschriebenen Bandpaß wird bei dem im folgenden behandelten Filter die Variation der Bandbreite nach Gleichung (5.36) ausgenutzt. Die Mittenfrequenz wird bei $f_B = f_{A/4}$ festgehalten, dazu ist nach Gleichung (5.35) der Koeffizient $\beta = 0$ zu setzen. Neben der Veränderung des Koeffizienten α zur Veränderung der Bandbreite ist auch noch eine Vorzeichenumschaltung für die transformierende Allpaßfunktion möglich. Für die Abtasthaltglieder wurde die Parallelkonfiguration /24/, Schaltung P 1 nach /32/ verwendet. Dabei ist noch ein dritter Haltekondensator hinzugefügt worden, der es ermöglicht, das Abtasthaltglied wahlweise für ein- oder zweifache Verzögerung zu verwenden. Bild 5.18 erläutert die Zusammenhänge: je nach Betriebsart wird ein Kondensator, auf den im Zeitintervall $\lambda T < t \leq (\lambda+1)T$ ein Signalwert gespeichert wurde, im Intervall $(\lambda+1)T < t \leq (\lambda+2)T$ oder erst im Intervall $(\lambda+2)T < t \leq (\lambda+3)T$ abgefragt. Die Allpaßfunktion hat also folgende Form:

$$AP(z) = \begin{cases} \pm \frac{\alpha z + 1}{z + \alpha} \\ \mp \frac{\alpha z^2 + 1}{z^2 + \alpha} \end{cases} \quad \alpha \text{ variabel} \quad (5.41)$$

Je nach gewählter Allpaßfunktion kann das Filter daher Tiefpaß, Hochpaß, Bandpaß oder Bandsperre sein. In jeder Betriebsart ist die Bandbreite über den gleichen Variationsbereich veränderbar.

Bild 5.19 zeigt das Blockschaltbild. Vor dem Eingangstiefpaßfilter liegt noch ein Verstärker, dessen Verstärkung in sechs Stufen umgeschaltet werden kann. Von einer zweiten Ebene desselben Schal-

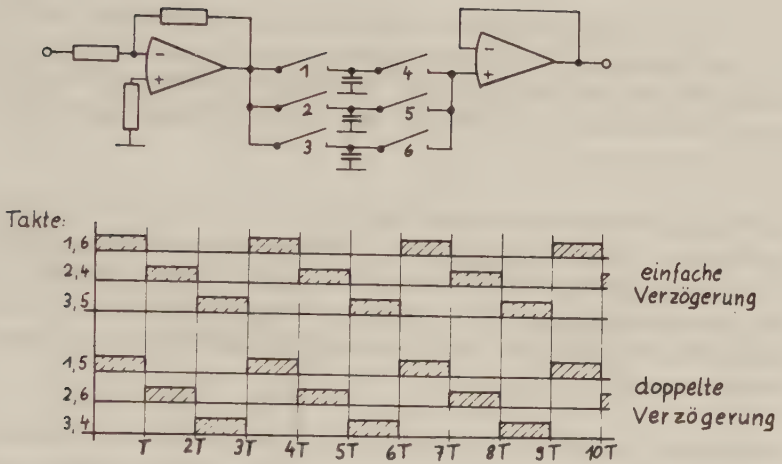


Bild 5.18: Abtasthalteglied für ein- oder zweifache Verzögerung

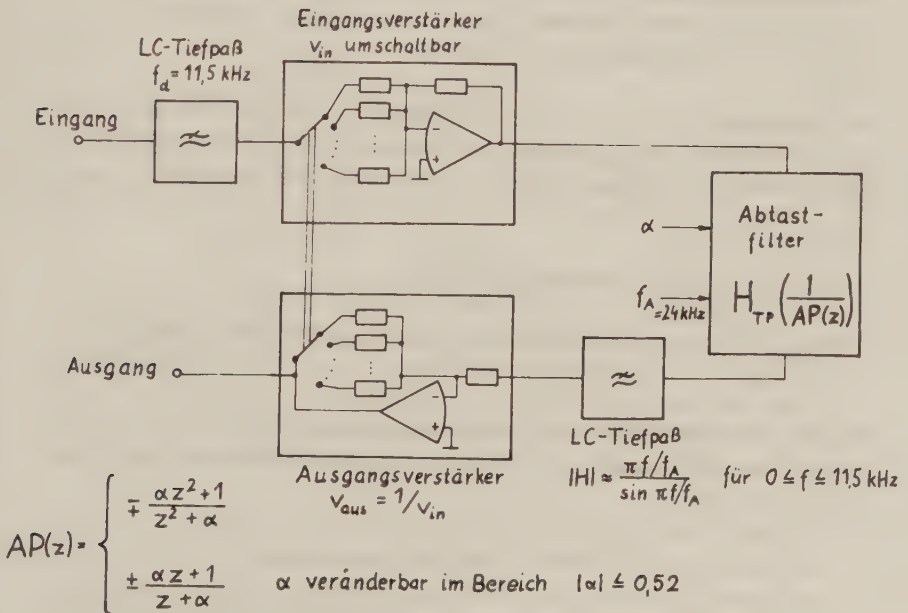


Bild 5.19: Blockschaltbild des veränderbaren Abtastfilters

ters wird ein Dämpfungsglied am Ausgang mit umgeschaltet, so daß die Verstärkung der Gesamtanordnung immer gleich eins bleibt. Es ist dadurch möglich, auch bei kleinen Eingangssignalen das digitale Filter zur Verbesserung des Signal-Geräuschabstandes voll auszusteuern.

Das Eingangstiefpaßfilter unterdrückt Spektralanteile am Eingang, die außerhalb des durch das Abtasttheorem gegebenen Bereiches liegen; das Ausgangsfilter unterdrückt die höheren Spektralanteile im Ausgangssignal des digitalen Filters und bewirkt eine Entzerrung des durch die Interpolation nullter Ordnung hervorgerufenen Frequenzganges.

Aufgrund der schlechten Erfahrungen hinsichtlich des Rauschens bei dem ziemlich breitbandigen Bandpaßfilter sind hier die Arbeitsfrequenzen so niedrig gewählt worden, daß Abtasthalteglieder mit dem Verstärker μA 709 verwendet werden können, der im Rauschverhalten wesentlich besser ist als der breitbandig beschaltete Verstärker μA 702. Die Abtastfrequenz wurde auf $f_A = 24$ kHz festgelegt.

Als Basistiefpaß wurde wieder das Cauer-Filter C 04 25 35 a mit $a_{Dmax} = 0,28$ dB, $a_{Smin} = 40,3$ dB verwendet. Es wurde bilinear in die z -Ebene transformiert derart, daß die Durchlaßgrenze f_D bei $f_A/16$ liegt.

Man erhält die Übertragungsfunktion:

$$H_{TP}(z) = 0,1461 \frac{z^2 - 1,518z + 1}{z^2 - 1,722z + 0,8829} \cdot 0,0929 \frac{z^2 - 0,3578z + 1}{z^2 - 1,589z + 0,6579}$$

Für den Allpaß nach Gl. (5.41) wurde ein Variationsbereich von $-0,52 \leq \alpha \leq 0,52$ gewählt. Damit beträgt die Bandbreite für alle Filter (Gl. (5.31), (5.33), (5.36), (5.40)):

$$0,48 \text{ kHz} \leq B \leq 4,3 \text{ kHz}$$

Das digitale Tiefpaßfilter wurde als Kaskadenschaltung zweier Blöcke 2. Grades aufgebaut, in diesem Falle aber nicht direkt, sondern in Multiplextechnik /32/. Die Verzögerungsglieder in der Tiefpaßschaltung sind ersetzt durch Allpässe nach Gl. (5.41),

entsprechend Bild 5.14.

Für die Realisierung der Allpässe wurde eine erstmals von Jackson et. al. /34/ angegebene Struktur gewählt, Bild 5.20.

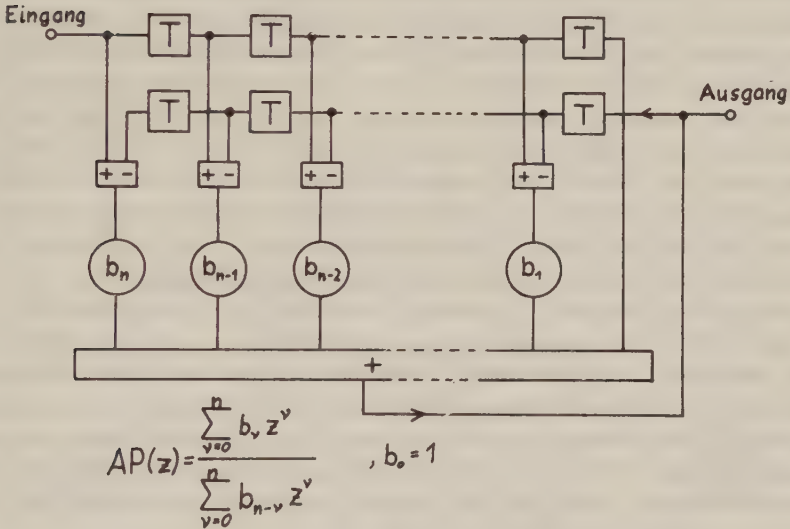


Bild 5.20: Nicht-kanonischer Koppelplan für digitale Allpässe.

Die Schaltung enthält gegenüber der kanonischen Form die doppelte Anzahl von Verzögerungselementen, benötigt jedoch nur jeweils einen Koeffizientenmultiplikierer für die beiden gleichen Koeffizienten im Zähler und Nenner der Allpaßübertragungsfunktion. Diese Eigenschaft ist in der vorliegenden Anwendung besonders vorteilhaft, da ja der Koeffizient α variabel gemacht werden sollte.

Die Variation von α erfolgt über Multiplikierer (Burr Brown Modell 4098/25), jeweils einen pro Allpaß. Die Differenzeingänge des Multiplikiererbausteins konnten hier vorteilhaft verwendet werden.

Die Umschaltung des Vorzeichens der Allpaßfunktion erfolgt über

Relais. Dabei ist die Struktur so gewählt, daß für beide Vorzeichen der Allpaßfunktion gleich viele Verstärker erforderlich sind. Bild 5.21 zeigt das Schaltbild des Filters.

Der Frequenzgang des Betrages der Übertragungsfunktion des Filters wurde für alle einstellbaren Filterkonfigurationen und verschiedene Koeffizienten α gemessen. (Selektive Messung mit dem Hewlett-Packard Wave Analyzer 3590 A. Die vertikalen Spitzen an den Flanken der Dämpfungskurve rühren von der automatischen Meßbereichumschaltung des Gerätes her.) Jeweils zwei verschiedene Tiefpässe und Bandpässe zeigen die Bilder 5.22 - 5.25. Die Übereinstimmung mit den theoretisch abgeleiteten Ergebnissen ist recht gut. Gegenüber dem vorher beschriebenen Bandpaß ist das Rauschverhalten wesentlich verbessert. Die selektive Messung des Rauschens zeigt auch hier den für diese Filter typischen Verlauf mit stärkeren Spektralanteilen in der Nähe der Pole der Übertragungsfunktion. (Auf die Spitzen bis 8 kHz und 12 kHz wird im Abschnitt 5.4 eingegangen, S.72). Jedoch liegt das Rauschen um eine Größenordnung niedriger als bei dem Bandpaßfilter. Breitbandig gemessen beträgt der Signal-Geräusch-Abstand ca. 40 dB bei Vollaussteuerung, liegt also in der Größe der minimalen Sperrdämpfung. Andererseits bringt die Verwendung schmalbandiger aktiver Elemente auch die bekannten Probleme analoger Schaltungstechnik mit sich: an den Grenzen des Durchlaßbereiches ist eine deutliche Kantenverrundung sichtbar.

In Bild 5.26 ist der gemessene Betragsverlauf für drei verschiedene Bandpässe dargestellt. Diese für den Durchlaßbereich wesentlich aufschlußreichere Messung wurde einige Monate nach Fertigstellung und Abgleich des Filters vorgenommen, d.h. es sind möglicherweise Alterungseffekte aufgetreten. (Der Abgleich der Koeffizienten erfolgte durch Abkratzen von Schichtwiderständen). Die Messung zeigt eine deutliche Kantenverrundung, das "equal-ripple"-Verhalten ist überhaupt nicht vorhanden. Man kann vermuten, daß die Koeffizientenempfindlichkeit der Schaltung zu groß ist.

Eine zusammenfassende Beurteilung von Abtastfiltern als Kern eines einstellbaren selektiven Filters, wie sie hier verwendet werden, wird im Abschnitt 5.3.5 erfolgen.

Ein Teil der in diesem Abschnitt aufgeführten Ergebnisse ist bereits vorher veröffentlicht worden /35, 36/.

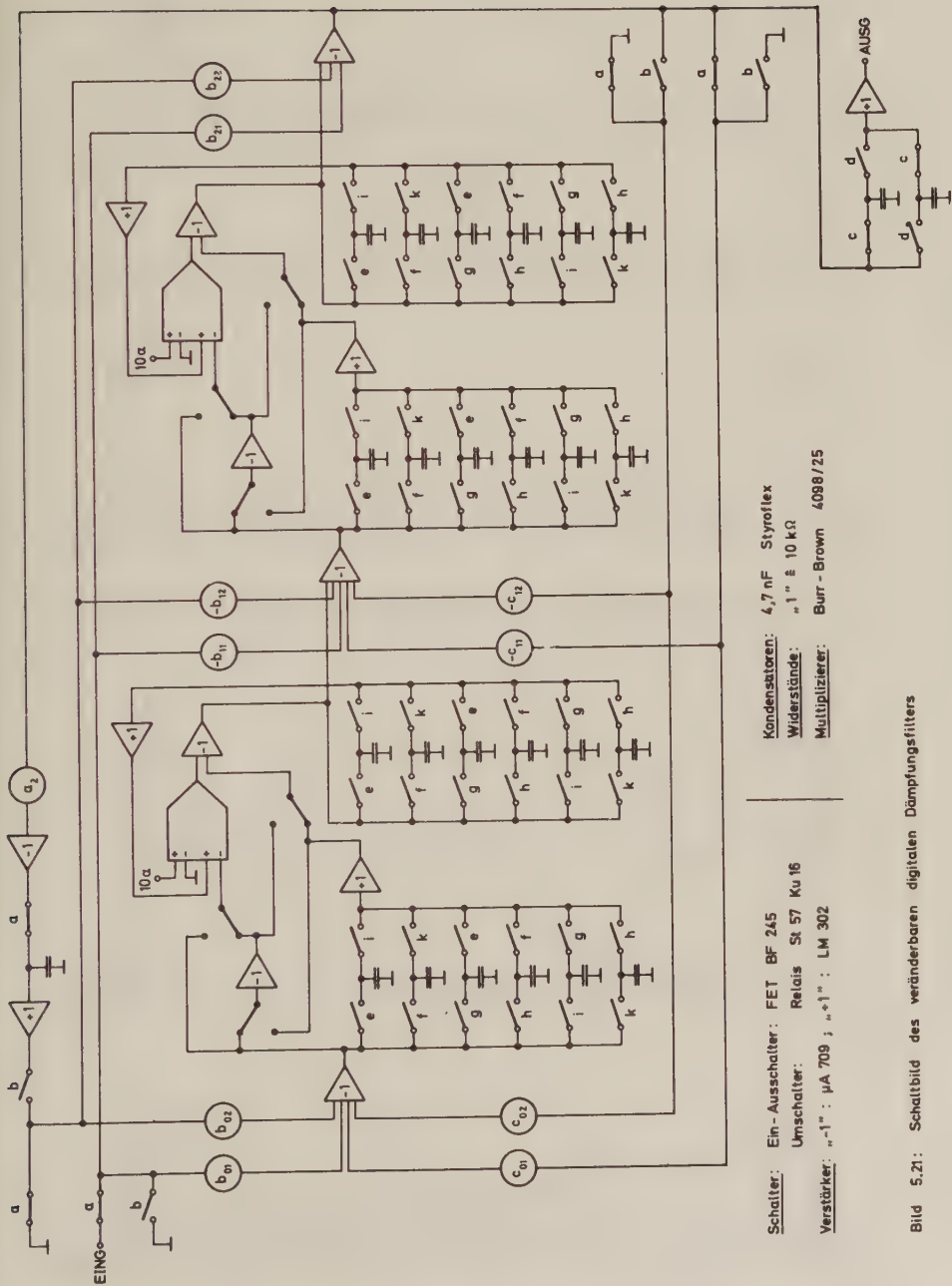


Bild 5.21: Schaltbild des veränderbaren digitalen Dämpfungsfilters

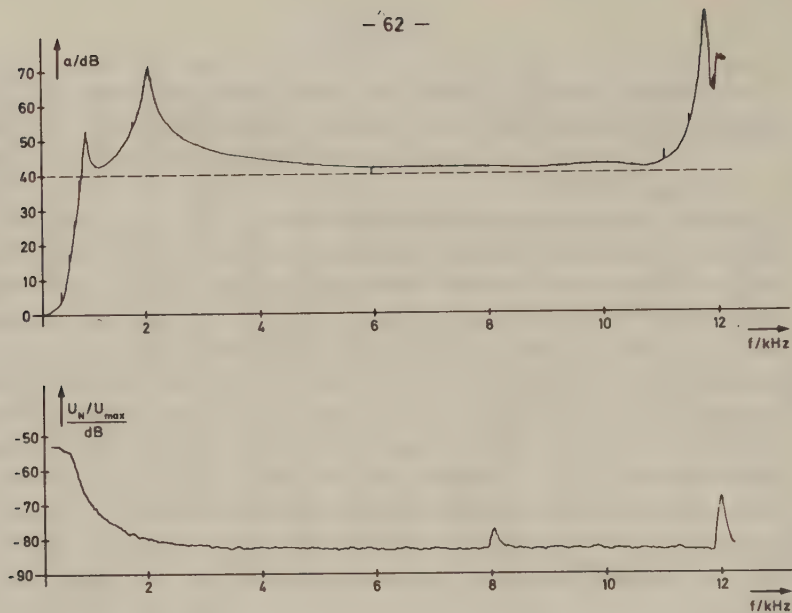


Bild 5.22 : Frequenzgang (oben) und Eigenrauschen (unten) für ein Tiefpaßfilter mit $\alpha = -0,52$

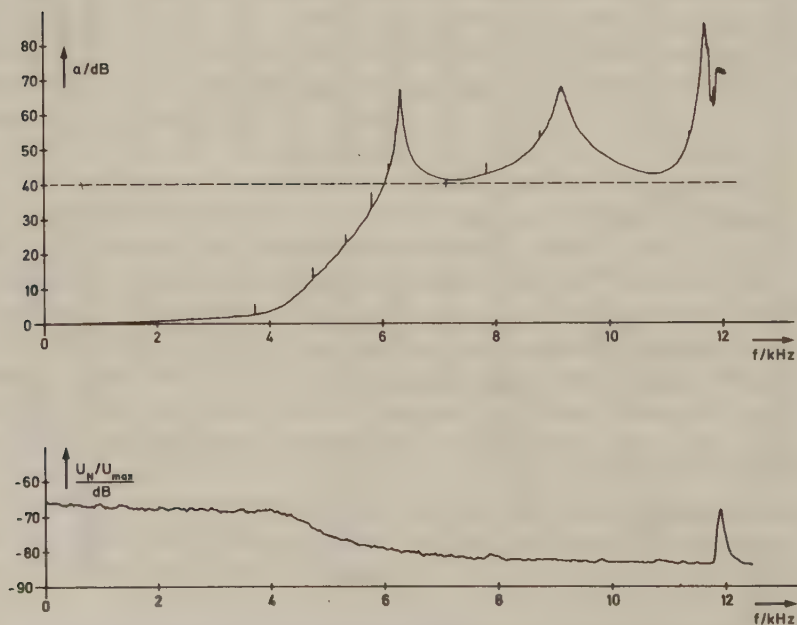


Bild 5.23 : Frequenzgang (oben) und Eigenrauschen (unten) für ein Tiefpaßfilter mit $\alpha = 0,52$

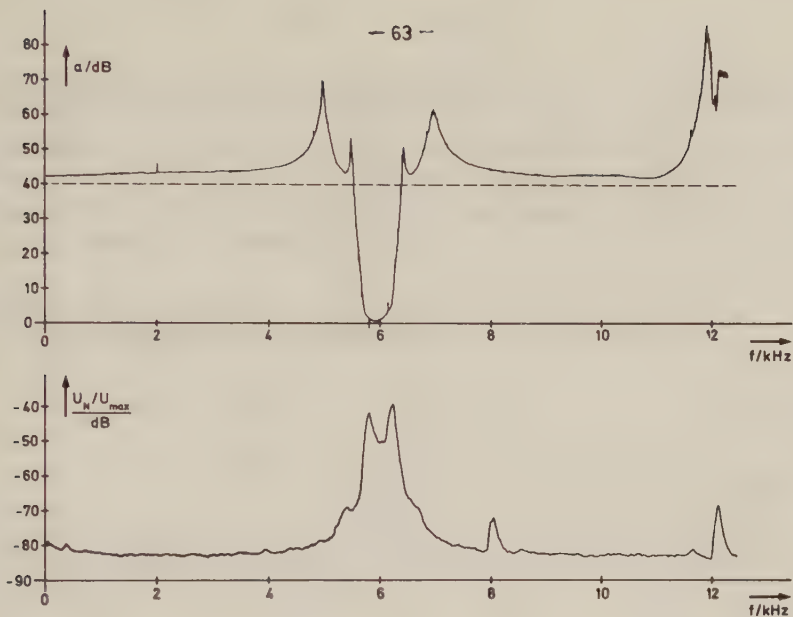


Bild 5.24: Frequenzgang (oben) und Eigenrauschen (unten) für ein Bandpaßfilter mit $\alpha = -0,52$

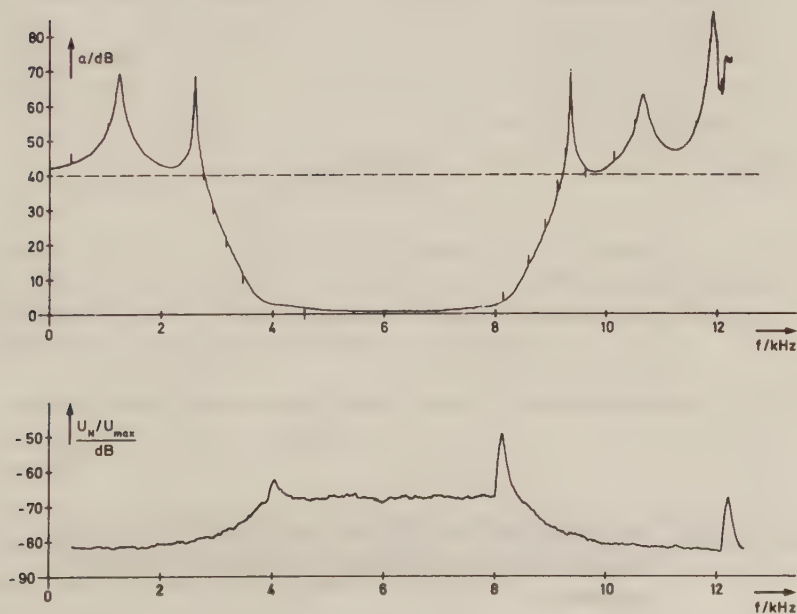


Bild 5.25: Frequenzgang (oben) und Eigenrauschen (unten) für ein Bandpaßfilter mit $\alpha = 0,52$

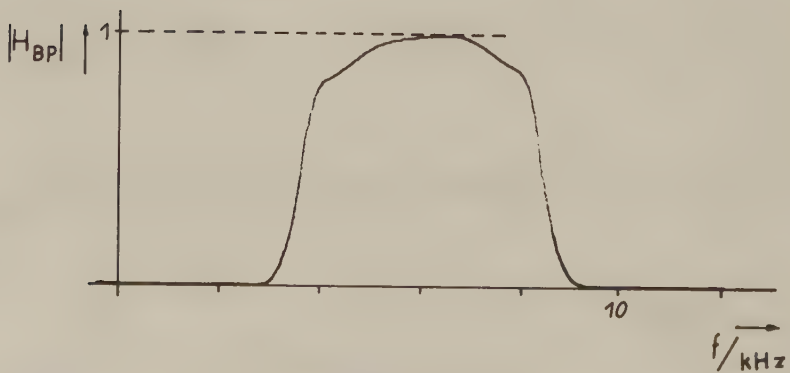
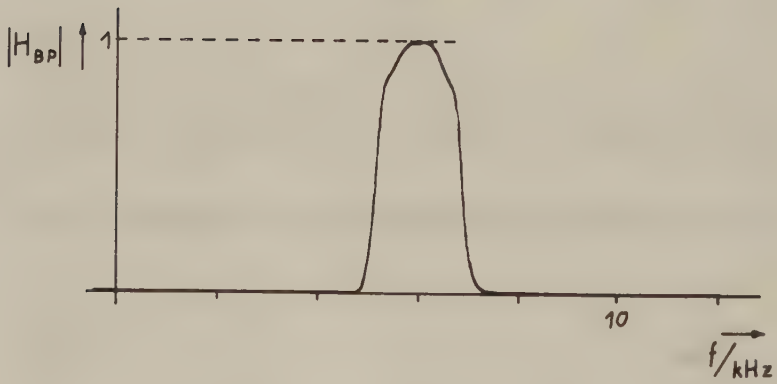
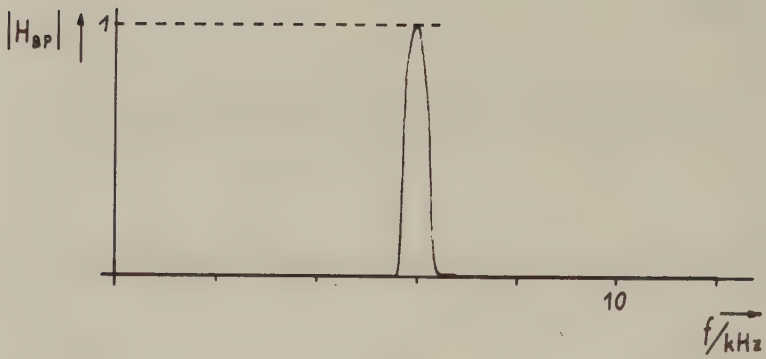


Bild 5.26: Gemessener Betragsverlauf beim Bandpaß kleinster (oben), mittlerer (Mitte) und größter (unten) Bandbreite

5.3.4 Transformation mit weiteren Funktionen

Im Abschnitt 5.3.1 wurde eine zweite Funktionenklasse $F(z)=J(z)$ eingeführt Gl. (5.27), die sich zum Aufbau veränderbarer digitaler Filter eignet. Ihre Eigenschaften und Anwendbarkeit sollen im folgenden Abschnitt untersucht werden.

Von den möglichen Funktionen ersten Grades aus der Klasse $J(z)$ wählt man zweckmäßig die einfachste:

$$A(z) = \frac{z-1}{z+1} \quad z = \frac{1+A}{1-A} \quad (5.42)$$

oder

$$A(z) = \frac{z+1}{z-1} \quad z = \frac{A+1}{A-1} \quad (5.43)$$

Bei einer gegebenen Übertragungsfunktion $H(z)$ für das Basisfilter gewinnt man die Koeffizienten b'_μ , c'_ν nach Gleichung (5.24) durch Einsetzen der Funktion $z = z(A)$.

Es sei hier noch bemerkt, daß sich dieser Rechenschritt vielfach erübrigt. Wenn nämlich die Berechnung von $H(z)$ durch bilineare Transformation aus einer kontinuierlichen Tiefpaß-Übertragungsfunktion $H(s)$ erfolgt /32, 37/, so sind die Koeffizienten b'_μ , c'_ν unmittelbar mit denen der kontinuierlichen Übertragungsfunktion identisch, $H(z)$ braucht also gar nicht explizit berechnet zu werden. Wählt man $A(z)$ nach Gl. (5.42), so entsteht ein Tiefpaß, nach Gl. (5.43), so entsteht ein Hochpaß. Wie man leicht einsieht, geht (5.42) für $z: = -z$ in (5.43) über.

Im folgenden werden wieder die Bezeichnungen von Abschnitt 5.3.2 verwendet. Die identischen Teilsysteme mit der Übertragungsfunktion $\frac{1}{A(z)}$ werden ersetzt durch identische Teilsysteme mit der Übertragungsfunktion $J(\xi)$. Auf dem Einheitskreis gilt

$$\begin{aligned} z &= e^{j2\pi f/f_A} = e^{j\varphi} \\ \xi &= e^{j2\pi f'/f_A} = e^{j\psi} \end{aligned}$$

Gesucht sind die Beziehungen zwischen f und f' für die interessierenden Spezialfälle von $J(\xi)$, dabei wird $A(z)$ nach Gl. (5.43) gewählt, das Ausgangssystem ist ein Tiefpaß.

Man erhält einen einstellbaren Tiefpaß durch die Transformation

$$\frac{1}{A(z)} = \frac{z+1}{z-1} = J(\xi) = K_0 \frac{\xi+1}{\xi-1}, \quad K_0 > 0 \quad (5.44)$$

Für die Beziehung zwischen den Frequenzen f und f' folgt:

$$f' = \frac{f_A}{\pi} \arctan \left(K_0 \tan \frac{\pi f}{f_A} \right) \quad (5.45)$$

Entsprechend ergibt sich ein einstellbarer Hochpaß durch die Substitution

$$\frac{1}{A(z)} = \frac{z+1}{z-1} = J(\xi) = \frac{1}{K_0} \frac{\xi-1}{\xi+1}, \quad K_0 > 0 \quad (5.46)$$

$$f' = \frac{f_A}{\pi} \arctan \left(K_0 \tan \left(\frac{\pi f}{f_A} + \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (5.47)$$

Setzt man $K_0 = \frac{1+\gamma_1}{1-\gamma_1}$, so werden die Beziehungen (5.31) und (5.45) sowie (5.33) und (5.47) identisch, es liegen also hier dieselben Variationsmöglichkeiten wie bei der Allpaßtransformation vor.

Setzt man Teilsysteme mit Übertragungsfunktionen $J(\xi)$ vom zweiten Grad ein, so wird der Tiefpaß in einen Bandpaß oder eine Bandsperre transformiert.

Tiefpaß-Bandpaß-Transformation:

$$\frac{1}{A(z)} = \frac{z+1}{z-1} = J(\xi) = \frac{K_0 \frac{\xi-1}{\xi+1}}{\left(\frac{\xi-1}{\xi+1} \right)^2 + K_1^2}, \quad K_0 > 0 \quad (5.48)$$

Tiefpaß-Bandsperre-Transformation:

$$\frac{1}{A(z)} = \frac{z+1}{z-1} = J(\xi) = \frac{\left(\frac{\xi-1}{\xi+1} \right)^2 + K_1^2}{K_0 \frac{\xi-1}{\xi+1}}, \quad K_0 > 0 \quad (5.49)$$

Auf dem Einheitskreis wird

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{1}{j \tan \pi f / f_A}$$

$$\frac{\xi-1}{\xi+1} = j \tan \pi f' / f_A$$

d.h. man erhält den gesuchten Zusammenhang zwischen f und f' ,

wenn man in den bekannten Formeln für die Reaktanztransformation bei kontinuierlichen Filtern (Gl. (5.14), (5.15), (5.16)) ω ersetzt durch $\tan \pi f/f_A$.

Es gilt daher für den resultierenden Bandpaß:

$$f'_B = \frac{f_A}{\pi} \arctan K_1 \quad (5.50)$$

für die Bandbreite:

$$\tan \frac{\pi f'_{+D}}{f_A} - \tan \frac{\pi f'_{-D}}{f_A} = K_0 \tan \frac{\pi f'_D}{f_A} \quad (5.51)$$

$$B = f'_{+D} - f'_{-D}$$

für den Zusammenhang zwischen den Bandgrenzen und der Bezugsfrequenz:

$$\tan \frac{\pi f'_{+D}}{f_A} \cdot \tan \frac{\pi f'_{-D}}{f_A} = \tan^2 \frac{\pi f'_B}{f_A} = K_1^2 \quad (5.52)$$

Man erhält also mit Teilsystemen der Übertragungsfunktion $J(\xi)$ insgesamt dieselben Variationsmöglichkeiten wie mit Allpässen. Auch hier können bei Bandfiltern die Bezugsfrequenz und die Bandbreite voneinander unabhängig eingestellt werden.

Es ist jedoch zu beachten, daß die Koeffizienten K_0 , K_1 bei Teilübertragungsfunktionen $J(\xi)$ vom zweiten Grade nur dann explizit und nur an einer Stelle auftreten, wenn die Teilsysteme selbst nicht aus der Zusammenschaltung von Verzögerungselementen, sondern von Unterteilsystemen mit der Übertragungsfunktion $\frac{\xi+1}{\xi-1}$ gebildet werden. Multipliziert man nämlich $J(\xi)$ in Gl. (5.48) aus, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} J(\xi) &= \frac{K_0 \xi^2 - K_0}{(1+K_1^2)\xi^2 + 2(K_1^2-1)\xi + (1+K_1^2)} \\ &= \frac{\frac{K_0}{1+K_1^2} \xi^2 - \frac{K_0}{1+K_1^2}}{\xi^2 + 2\xi \frac{K_1^2-1}{K_1^2+1} + 1} \end{aligned}$$

Man erhält daher einen einstellbaren digitalen Bandpaß, wenn man in der kontinuierlichen Schaltung nach Bild 5.6 unmittelbar alle Integrierer (mit der Übertragungsfunktion $-\frac{1}{s}$) ersetzt durch digitale Teilsysteme mit der Übertragungsfunktion $-\frac{\xi+1}{\xi-1}$ (die einen einfachen numerischen Integrator nach der Trapezregel darstellen!).

5.3.5 Bemerkungen zur Stabilität

Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf die Realisierung einstellbarer digitaler Filter mit Abtasthaltegliedern; die Realisierung mit digitalen Mitteln wird getrennt in Abschnitt 5.5 untersucht. Es sollen hier dieselben Fragen untersucht werden wie in Abschnitt 5.2.3 für RC-aktive kontinuierliche Filter, d.h.:

1. die Stabilität der Kennwerte gegenüber Parameterschwankungen
2. die Stabilität im systemtheoretischen Sinne.

Zu 1.: Bezüglich der Gleichspannungsdrift und ihrer schaltungstechnischen Beherrschung gelten hier dieselben Überlegungen wie für kontinuierliche RC-aktive Filter, da die Realisierung auch hier durch beschaltete Operationsverstärker erfolgt. Die Aussagen von Abschnitt 5.2.3 können direkt übernommen werden.

Für Abtastfilter, die nach dem Verfahren von Abschnitt 5.3.4 aufgebaut sind, gelten auch dieselben Zusammenhänge wie bei RC-aktiven Filtern für die Stabilität der Übertragungseigenschaften des Filters bezüglich Parameterschwankungen. Die Schaltung entsteht ja unmittelbar dadurch, daß in einer Analogrechen-schaltung die Integrierer durch Blöcke mit der Übertragungsfunktion $J(z) = \frac{z+1}{z-1}$ ersetzt werden. Auch bei nicht idealem Gleichlauf der Einstellung der Parameter K_0 , K_1 der Teilsysteme bleiben also die Nullstellen der Übertragungsfunktion auf dem Einheitskreis.

Anders liegen die Verhältnisse bei der Allpaßtransformation. Zur genauen Untersuchung wird ein Block 2. Grades betrachtet, der Teil eines veränderbaren Tiefpasses in Kaskadenschaltung sein

könnte, Bild 5.27.

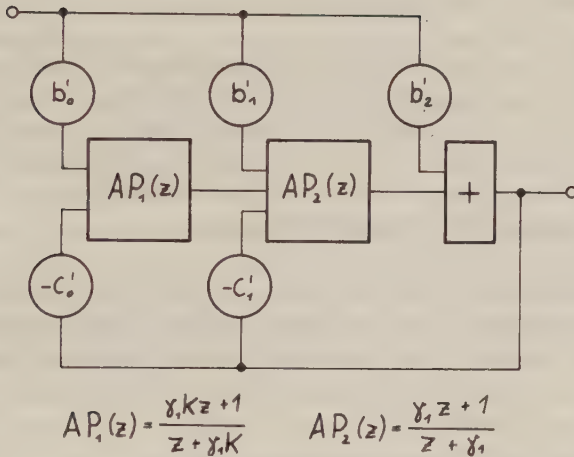


Bild 5.27: Teilblock eines veränderbaren Tiefpasses bei nichtidealem Gleichlauf der Parametereinstellung

Die Übertragungsfunktion lautet:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{d_2 z^2 + d_1 z + d_0}{z^2 + e_1 z + e_0} \quad (5.53)$$

$$\begin{aligned} \text{mit } d_2 &= \frac{b'_2 + \gamma_1 b'_1 + K \gamma_1^2 b'_0}{1 + \gamma_1 c'_1 + K \gamma_1^2 c'_0} \\ d_1 &= \frac{b'_2 (\gamma_1 K + \gamma_1) + b'_1 (\gamma_1^2 K + 1) + b'_0 (\gamma_1 K + \gamma_1)}{1 + \gamma_1 c'_1 + K \gamma_1^2 c'_0} \\ d_0 &= \frac{b'_2 \gamma_1^2 K + K \gamma_1 b'_1 + b'_0}{1 + \gamma_1 c'_1 + K \gamma_1^2 c'_0} \\ e_1 &= \frac{\gamma_1 K + \gamma_1 + c'_1 (\gamma_1^2 K + 1) + c'_0 (\gamma_1 K + \gamma_1)}{1 + \gamma_1 c'_1 + K \gamma_1^2 c'_0} \\ e_0 &= \frac{\gamma_1^2 K + \gamma_1 K c'_1 + c'_0}{1 + \gamma_1 c'_1 + K \gamma_1^2 c'_0} \end{aligned}$$

Die Nullstellen des Basistiefpasses liegen auf dem Einheitskreis, wenn gilt: $b_2' = b_0'$. Man erkennt aus Gl. (5.53), daß für $K \neq 1$ $d_2 \neq d_0$ wird, d.h. die Nullstellen der resultierenden Übertragungsfunktion liegen bei der geringsten Ungleichheit der Teilsysteme nicht mehr auf dem Einheitskreis, sondern je nach Größe von K außerhalb oder innerhalb.

Diese Eigenschaft macht sich auch in den Messungen bemerkbar: Bei den verschiedenen eingestellten Filtern (Bilder 5.15 bis 5.17 und 5.22 bis 5.26) sind die Dämpfungspole sehr unterschiedlich ausgebildet, in Bild 5.17 ist zu erkennen, daß die erste Nullstelle der Übertragungsfunktion oberhalb des Durchlaßbereiches nicht mehr auf dem Einheitskreis liegt.

Die aus den Betragsmessungen (Bild 5.26) abgeleitete Vermutung, daß veränderbare Abtastfilter schlechte Empfindlichkeitseigenschaften haben, wird durch diese theoretischen Untersuchungen bestätigt.

Zu 2.: Stabilität im systemtheoretischen Sinne.

Für die Polstellen des resultierenden Systems gilt dasselbe wie für die Nullstellen: Sie können bei mangelhaftem Gleichlauf von γ_1 in allen Teilsystemen in Richtung zu kleineren oder größeren Beträgen hin verändert werden; wenn sie von vornherein dicht am Einheitskreis liegen, kann das System instabil werden. Systeme nach Abschnitt 5.3.4 sind auch hier angenehmer; wenn nur die Teilsysteme $\frac{z+1}{z-1}$ sich nicht ändern und die Koeffizienten b_μ' , c_ν' richtig sind, können sie durch mangelhaften Gleichlauf von K_0 , K_1 in den Untersystemen nie instabil werden.

Der Frequenzgang der Operationsverstärker kann ebenfalls zu Instabilitäten führen. Wie aus Bild 5.14 zu entnehmen ist, treten für $\alpha \neq 0$ rückgekoppelte Schleifen auf, die nur über Summierer, nicht über Abtasthalteglieder führen. Im Unterschied zu den RC-aktiven Schaltungen fehlt hier der Integrierer, durch den die Stabilität gesichert wird, d.h. derartige Abtastsysteme erfordern stets zusätzliche Maßnahmen. Diese bestehen darin, daß man einen Verstärker der Schleife durch eine zusätzliche kapazitive Rückkopplung im Frequenzgang so schmalbandig macht, daß durch ihn

die Verstärkung bei den Frequenzen, bei denen die Phasendrehung der übrigen Operationsverstärker kritisch wird, bereits auf Werte < 1 abgefallen ist. Das Verfahren entspricht genau der "lag-compensation" /17/ eines mehrstufigen Operationsverstärkers. Ein geeigneter Verstärker ist hierfür der Summierer am Ausgang des Filterblockes, da er in beiden Rückführungsschleifen, sowohl für c'_0 als auch für c'_1 liegt. Selbstverständlich muß auch dieser Verstärker noch eine für das Signal ausreichende Bandbreite haben, man könnte also negativ formulieren: alle anderen Verstärker müssen aus Stabilitätsgründen wesentlich breitbandiger sein als vom Signal her erforderlich.

Die Frage nach der Stabilität derartiger Abtastsysteme unter Berücksichtigung der nichtlinearen Begrenzungslinie ist hier genauso wenig allgemein zu beantworten wie bei den RC-aktiven Filtern. Die Verhältnisse sind sehr unübersichtlich und können bestenfalls im Einzelfall numerisch untersucht werden. Es gilt auch hier die Vermutung, daß bei gleicher ursprungssymmetrischer Begrenzungskennlinie aller Verstärker auch das nichtlineare System stabil ist, wenn das lineare (unter Vernachlässigung der Begrenzung) stabil ist. Auch hier wurde in umfangreichen empirischen Versuchen am Analogrechner kein Gegenbeispiel gefunden.

5.4 Ein Vergleich zwischen Abtastfiltern und RC-aktiven Filtern

Wie in den zurückliegenden Kapiteln mit einiger Ausführlichkeit dargelegt wurde, besteht sowohl für RC-aktive kontinuierliche als auch für Abtastfilter die Möglichkeit, mit Hilfe einer Frequenztransformation durch geeignete Teilsysteme mit einstellbaren Parametern selektive Filter herzustellen, deren Grenzfrequenzen einstellbar sind. Die erreichbaren Variationsmöglichkeiten und der erzielbare Bedienungskomfort sind für beide Techniken in etwa gleich. Jedoch bestehen bezüglich des praktischen Aufbaus einige Unterschiede, so daß Anlaß besteht, die Vor- und Nachteile beider Techniken zu diskutieren.

Für die RC-aktiven kontinuierlichen Filter spricht:

1. Der Aufwand ist wesentlich geringer. Vergleichbar sind etwa

ein Integrierer und ein Abtasthalteglied, Bild 5.28.

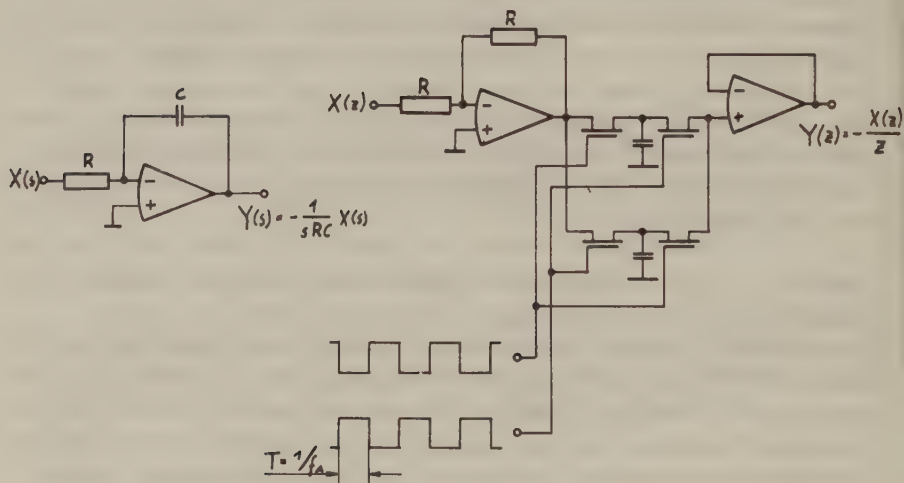


Bild 5.28: Schaltung eines Integrierers und eines Abtasthaltegliedes

Dabei muß die Bandbreite der Verstärker für kontinuierliche Filter nur für die Signalbandbreite ausreichend sein, bei Abtastfiltern werden Treppenfunktionen verarbeitet, die durch Abtasten und Halten des Signales entstehen. Der Bandbreitenbedarf ist wesentlich höher.

Außerdem erfordern Abtastfilter eine zentrale Taktversorgung; wegen des periodischen Frequenzganges ist ein zusätzlicher Tiefpaß am Eingang erforderlich, am Ausgang muß durch ein geeignetes Filter die Treppenfunktion interpoliert werden (Bild 4.1).

- Als Folge der breitbandigen Verstärker ist bei Abtastfiltern der Leistungsbedarf größer und das Rauschverhalten schlechter. Außerdem gelingt die Unterdrückung der Taktfrequenz nur unvollkommen. Man sieht z.B. in den Meßkurven Bild 5.24, 5.25 eine Spitze im Spektrum des Rauschens bei 8 kHz: eine Folge davon, daß in den einzelnen Abtasthaltegliedern 6 Speicher-

kondensatoren zyklisch mit 48 kHz umgeschaltet werden (Bild 5.21). Die Spitze bei 12 kHz resultiert aus der Unsymmetrie der Abtasthalteschaltung am Ausgang (Schalter c, d in Bild 5.21).

Diesen beträchtlichen Nachteilen der Abtastfilter steht nur ein Vorteil gegenüber: Der Frequenzgang wird ausschließlich durch Widerstände eingestellt. Kondensatoren werden nur zum Halten verwendet, sie müssen hohe Ableitwiderstände aufweisen, der Kapazitätswert ist aber ziemlich unkritisch.

Man kann daher feststellen, daß für die in dieser Arbeit untersuchte Anwendung Abtastfilter gegenüber kontinuierlichen aktiven Filtern deutlich unterlegen sind. Ihre Anwendung wird vorerst beschränkt bleiben auf Probleme, in denen Eigenschaften verlangt werden, die nur Abtastfilter haben: z.B. Echoentzerrer mit endlicher Impulsantwort, wie er in der Entzerrung von Datenübertragungskanälen verwendet wird /38, 39/; oder Abtastregelsysteme mit endlicher Einstellzeit /40/.

5.5 Anwendung des Transformationsverfahrens auf digital realisierte Filter

Digitale Filter unterscheiden sich von Abtastfiltern lediglich durch die Art der Realisierung; während bei Abtastfiltern die durch Abtastung eines kontinuierlichen Signals gewonnenen Abtastwerte unmittelbar als analoge Spannungen durch Abtasthalteglieder verzögert über Summierverstärker mit geeigneten Widerstandsnetzwerken gewichtet aufaddiert werden, enthält das digitale Filter Schieberegister als Speicher und digitale Rechenwerke für Multiplikation und Addition. Die Folge der Eingangszahlenwerte muß in codierter Form vorliegen, die Folge der Ausgangszahlenwerte erscheint ebenfalls in codierter Form. Die Verbindung zu kontinuierlichen Systemen kann über Analog-Digital- und Digital-Analog-Wandler hergestellt werden, Bild 5.29.

Die Anordnung nach Bild 5.29 leistet dasselbe wie ein Abtastfilter, häufig werden daher noch zusätzliche kontinuierliche Filter am Eingang und Ausgang erforderlich sein, Bild 4.1.

Der Analog-Digital-Wandler bedingt neben der Abtastung des Eingangssignals auch eine Quantisierung, da die von ihm abgegebenen

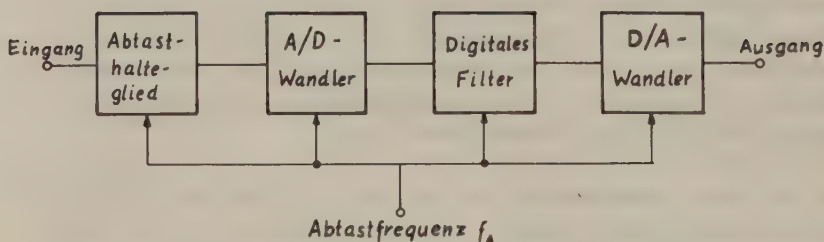


Bild 5.29: Digitales Filter mit vor- und nachgeschalteten Wandlern zur Verarbeitung kontinuierlicher Signale

digital codierten Worte nur endlich lang sein können. Außerdem sind die Speicher und Rechenwerke des digitalen Filters nur für eine endliche Wortlänge ausgelegt; da jede Multiplikation die Wortlänge erhöht, ist eine anschließende Rundung erforderlich.

Das digitale Filter ist daher ein kompliziertes nichtlineares System, eine exakte Beschreibung ist nahe zu unmöglich. Bei vielen Problemstellungen kann jedoch die Nichtlinearität vernachlässigt werden, man kann dann das Filter durch lineare Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten beschreiben und mit Hilfe der Z-Transformation eine Übertragungsfunktion $H(z)$ definieren. Die Beschreibung wird unter dieser Vernachlässigung mit der von Abtastfiltern identisch. Der Einfluß von Quantisierung und Rundung kann man teilweise dadurch berücksichtigen, daß man Rauschquellen innerhalb des Filters annimmt, deren Rauschsignal linear der Signalfunktion überlagert wird. Man kommt mit dieser Vereinfachung zu brauchbaren Aussagen hinsichtlich einer günstigen Struktur und der erforderlichen Wortlänge /33/.

Neben dem Quantisierungsrauschen treten als Folge der Nichtlinearität bei rekursiven Systemen stabile Grenzzyklen auf. Zu deren Untersuchung benutzt man andere Hilfsmittel, neben abschätzenden Formeln überwiegen die Simulation am Digitalrechner /41, 42/.

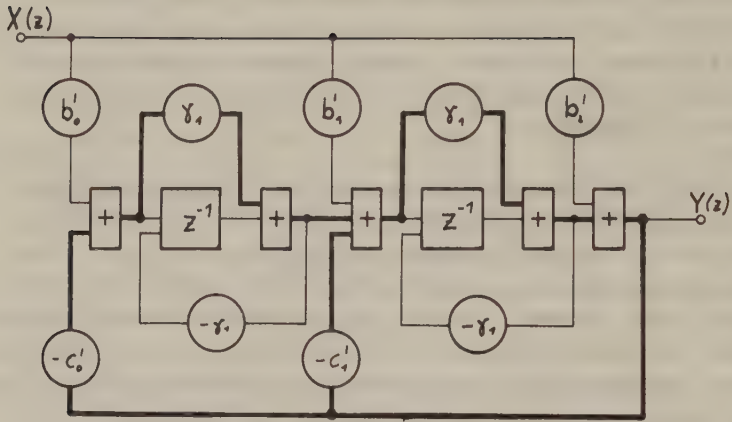
Wie bei allen aktiven Systemen muß auch hier die endliche Aussteuerbarkeit besonders berücksichtigt werden. Ebert, Mazo und Taylor /43/ haben für Blöcke 1. und 2. Grades die damit verbundenen Stabilitätsprobleme untersucht und Maßnahmen zur Sicherung der Stabilität angegeben.

Die ebenfalls nur endliche Wortlänge der Koeffizienten bedeutet nicht eine weitere Nichtlinearität, hat aber zur Folge, daß der Empfindlichkeit der Übertragungseigenschaften des Filters in der zur Realisierung gewählten Struktur besondere Beachtung zukommt. Avenhaus /33/ hat gezeigt, daß ein Satz von Koeffizienten endlicher Wortlänge, der durch Rundung aus einem Koeffizientensatz höherer Wortlänge entstanden ist, im allgemeinen keineswegs der günstigste ist, sondern daß eine Nachoptimierung der Koeffizienten bei gleicher Wortlänge zu besseren Frequenzgangverläufen führen kann. Diese Optimierung muß allerdings am konkreten Filter durchgeführt werden, die Ergebnisse sind nicht normierbar.

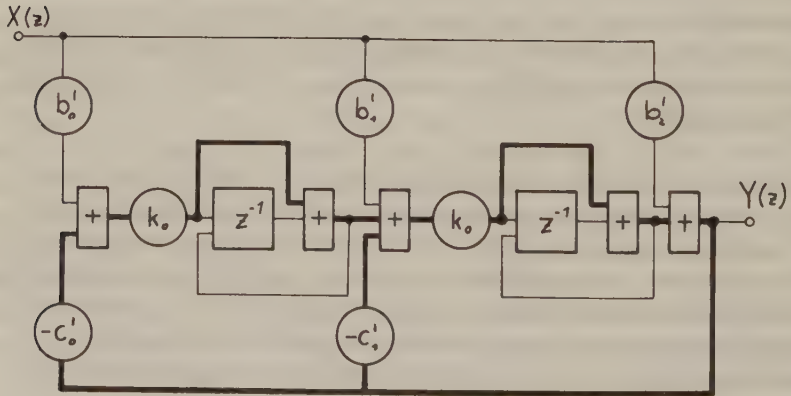
Setzt man zunächst voraus, daß die Wortlänge der Zustandsvariablen hinreichend groß, die Quantisierungsstufe also hinreichend klein ist, um die Beschreibung digitaler Filter mit linearen Differenzgleichungen und die Anwendung der Z-Transformation zu rechtfertigen, dann können die Überlegungen zur Synthese einstellbarer selektiver Abtastfilter ebenso auch auf digitale Filter angewendet werden.

Insgesondere erscheint das in Abschnitt 5.3.1 erläuterte Transformationsverfahren sehr vorteilhaft; da bei der Transformation nur die Skalierung der Abszisse im Frequenzgangdiagramm verändert wird, nicht aber die Ordinate, bleibt die maximale Durchlaßdämpfung und die minimale Sperrdämpfung des Basistiefpasses in jedem Falle erhalten, unabhängig von der eingestellten Grenzfrequenz. Hier scheint zunächst sogar eine Möglichkeit zur Katalogisierung der Optimierungsergebnisse zu liegen.

Jedoch läßt sich das Verfahren auf digital realisierte Systeme nur in ganz wenigen Sonderfällen anwenden. Bild 5.30 zeigt das Blockschaltbild für ein Teilsystem 2. Grades eines einstellbaren Tiefpasses mit den beiden Untersystemen nach Abschnitt 5.3.2 und 5.3.4. Man sieht, daß in beiden Fällen Rückkopplungsschleifen auf-



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H' \left(\frac{1}{AP(z)} \right) = \frac{b_2' \left(\frac{z+\gamma_1}{\gamma_1 z+1} \right)^2 + b_1' \left(\frac{z+\gamma_1}{\gamma_1 z+1} \right) + b_0'}{\left(\frac{z+\gamma_1}{\gamma_1 z+1} \right)^2 + c_1' \left(\frac{z+\gamma_1}{\gamma_1 z+1} \right) + c_0'}$$



$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H' \left(\frac{1}{J(z)} \right) = \frac{b_2' \left(\frac{z-1}{k_o(z+1)} \right)^2 + b_1' \left(\frac{z-1}{k_o(z+1)} \right) + b_0'}{\left(\frac{z-1}{k_o(z+1)} \right)^2 + c_1' \left(\frac{z-1}{k_o(z+1)} \right) + c_0'}$$

Bild 5.30: Blockschaltbild eines einstellbaren Tiefpasses
2. Grades mit den beiden transformierenden Teil-
systemen nach Abschnitt 5.3.2 und 5.3.4

treten, die nur Rechenwerke, aber keine Verzögerungsspeicher enthalten (verstärkt ausgezogene Linien). Derartige sog. "algebraische" Schleifen sind aber digital nicht zu verwirklichen, da die Rechenwerke während jeder Abtastperiode nur einen Rechenschritt durchführen. Das Ergebnis der arithmetischen Operationen liegt daher erst in der folgenden Abtastperiode vor, Schleifen ohne Verzögerung sind nicht realisierbar. Dieselbe Schwierigkeit tritt übrigens bei der digitalen Simulation kontinuierlicher Systeme auf.

Einige Sonderfälle dieser Strukturen sind möglich, nämlich alle die, bei denen solche Schleifen vermieden werden. Das bedeutet für die Allpaßtransformation:

a) $c_v = 0$ für $v = 0(1) n-1$, $c_n = 1$, d.h. das zu transformierende Ausgangsfilter muß nichtrekursiv sein

b) $\gamma_1 = 0$

Die Möglichkeit a) ist im allgemeinen uninteressant, da nichtrekursive Filter wesentlich schwächere Dämpfungseigenschaften aufweisen als rekursive gleichen Grades. Der mögliche Vorteil exakt konstanter Gruppenlaufzeit geht aber verloren, da durch die Transformation die Filter im allgemeinen rekursiv werden. Die Möglichkeit b) $\gamma_1=0$, oder allgemein für einen Allpaß r -ten Grades nach Gl.(5.28) $\gamma_r=0$, bedeutet eine erhebliche Beschneidung der Einstellbarkeit. Unter den Transformationen 1. Grades ist dann nur noch die einfache Tiefpaß-Hochpaß-Transformation $z: = -z$ möglich, die Grenzfrequenz kann nicht beeinflußt werden; mit den Transformationen 2. Grades lassen sich nur noch Bandpässe und Bandsperren konstanter Bandbreite und veränderbarer Mittenfrequenz herstellen (Gl. 5.35 bis 5.40).

Die zweite Transformation mit Funktionen $J(z)$ ist offenbar überhaupt nicht mehr möglich, denn ein System $c'_0 = c'_1 = 0$ wäre nicht stabil (man beachte, daß die Koeffizienten b'_u , c'_v nicht identisch sind mit denen des zu transformierenden Systems $H(z)$ wie bei der Allpaßtransformation), und die Spezialisierung $J(z) = \frac{1}{z} \cdot K(z)$ ist innerhalb der zulässigen Funktionen $J(z)$ nicht enthalten.

Selbstverständlich kann man die Strukturen nach Bild 5.30 so umformen, daß sie (bei gleicher Übertragungsfunktion) digital realisierbar werden; jedoch treten dann die für die Grenzfrequenzen entscheidenden Koeffizienten der Teilsysteme nicht mehr isoliert auf, sondern alle Koeffizienten der geänderten Struktur hängen von den γ_v bzw. k_v ab. Die einfache Einstellbarkeit geht also verloren.

Es erscheint daher wenig sinnvoll, ein einstellbares digitales Filter nach diesem Prinzip aufzubauen, der Aufwand für ein digitales Filter steht in keinem vernünftigen Verhältnis mehr zu den erzielbaren Einstellmöglichkeiten. Es ist zweckmäßiger, ein digitales Filter so zu bauen, daß seine Koeffizienten in bequemer Weise eingegeben werden können. Ein solches Filter leistet dann viel mehr als ein selektives Filter mit einstellbaren Grenzfrequenzen, es können beliebige Frequenzverläufe eingestellt oder auch Filter mit Forderungen im Zeitbereich verifiziert werden. Ein derartiges Gerät ist gebaut worden und wird im Abschnitt 6.4 beschrieben.

6. Frei programmierbare Filter

6.1 Einführung

In den vorausgegangenen Kapiteln dieser Arbeit wurden Verfahren untersucht, mit denen selektive Filter aufgebaut werden können, deren Grenzfrequenzen einstellbar sind. Die maximale Dämpfung im Sperrbereich oder bei Polynomfiltern die relative Flankensteilheit waren dabei fest vorgegeben.

In Erweiterung dieser Aufgabenstellung sollen im folgenden Kapitel Systeme untersucht werden, die eine weitgehend beliebige Programmierung gestatten. Mit derartigen Geräten ist es dann möglich, nicht nur Dämpfungsanforderungen zu erfüllen, sondern auch Anforderungen an den Phasenverlauf oder das Zeitverhalten. Neben möglichst hoher Flexibilität ist hier insbesondere eine einfache Bedienbarkeit anzustreben. Der Aufwand ist von sekundärer Bedeutung, da der Einsatz auf Labor- und Entwicklungsaufgaben beschränkt bleiben dürfte. Im allgemeinen wird die Programmierung durch Einstellung von Elementen (meist Widerständen) und durch Stecken von Verbindungsleitungen auf einem Programmierfeld erfolgen. Es wird aber gezeigt werden, daß bei digitalen Filtern eine wesentlich komfortablere Programmierung möglich ist, die Programmierfehler weitgehend ausschließt und vom Benutzer kaum Kenntnisse des internen Aufbaus verlangt.

6.2 Kontinuierliche Filter

An passiven frei programmierbaren Filtern ist dem Verfasser nur ein größeres Projekt bekannt, das in /44/ beschrieben ist. Das Gerät besteht aus mehreren Spulen und Kondensatoren, die mit 1 % Genauigkeit eingestellt und durch Leitungen miteinander verbunden werden können. Zur einfacheren Bedienung sind bei den Schwingkreisen nicht L und C , sondern $\omega_x = 1/\sqrt{LC}$ und $Z = \sqrt{L/C}$ einstellbar. Der Zweck war allerdings nicht, ein flexibles Filter aufzubauen, sondern ein Rechenhilfsmittel, das mit Hilfe eines Iterationsverfahrens die Lösung von Approximationsaufgaben aus der Filterentwicklung ermöglichte. Diese Aufgabe ist in den letzten Jahren vollständig vom Digitalrechner übernommen worden.

Ein frei programmierbares RC-aktives Filter stellt jeder Analogrechner dar. Wenn nur der Einsatz als Filter vorgesehen ist, könnte man an eine Sparausführung denken, bei der die sonst übliche Steuerung wegfällt, da nur der Betrieb "Dauerrechnen" gewünscht wird. Jedoch ist der Analogrechner nicht primär dazu entwickelt worden, als flexibles lineares Filter eingesetzt zu werden, seine Programmierung ist für diesen Einsatz zu umständlich. Auch die heute vielfach üblichen abnehmbaren Programmierbretter bringen hier keine entscheidende Verbesserung, da sie meist recht teuer sind und außerdem das Wechseln erfahrungsgemäß Kontaktschwierigkeiten zur Folge hat.

Etwas handlicher in der Programmierung sind die von Paul /45, 46/ vorgeschlagenen Systeme, bei denen Übertragungsfunktionen höheren (bis zu vierten) Grades mit nur einem Operationsverstärker realisiert werden, wobei jeder Koeffizient der Übertragungsfunktion unmittelbar an einem Potentiometer eingestellt werden kann.

Ebenfalls in die Gruppe der frei programmierbaren kontinuierlichen Filter fällt der in /47/ beschriebene Echoentzerrer. Er besteht aus einer Kette identischer passiver Laufzeitglieder, deren Ausgänge mit einstellbarer Gewichtung durch einen Operationsverstärker aufsummiert werden. Er stellt die analoge Realisierung eines nichtrekursiven digitalen Filters dar und ist somit ein Vorläufer des in Abschnitt 6.4 beschriebenen Gerätes.

6.3 Abtastfilter

Ein Abtast-Analogrechner, auf dem weitgehend beliebige, in z rationale Übertragungsfunktionen programmiert werden können, wurde von Kuntz /48/ entwickelt. Das Gerät enthält Abtasthalteglieder, Summierverstärker und Potentiometer, die dem gewünschten Koppelplan entsprechend durch Leitungen miteinander verbunden werden können. Die Abtasthalteglieder werden von einem zentralen Takt gesteuert, dessen Frequenz in weiten Grenzen einstellbar ist. Für die hier untersuchte spezielle Anwendung hat der Abtast-Analogrechner dieselben Nachteile wie ein üblicher Analogrechner: die Programmierung ist zu umständlich.

6.4 Digitale Filter

6.4.1 Einführung

Wie sich in den Abschnitten 6.2 und 6.3 gezeigt hat, ist bisher kaum der Versuch unternommen worden, ein frei programmierbares Filter zu bauen, das in seiner Flexibilität etwa in der Mitte liegt zwischen einem allgemeinen Analogrechner und einem selektiven Filter mit einstellbaren Grenzfrequenzen. Der Grund dürfte darin liegen, daß die bisher fast ausschließlich eingesetzte analoge Technik keine einfache Programmierung erlaubt, es werden immer Verbindungsleitungen zu stecken und Potentiometer einzustellen sein. Der Schritt zu einem richtigen Analogrechner ist daher nur klein. Anders liegen die Verhältnisse bei der digitalen Realisierung. Der Aufwand auch für ein ganz spezielles, nicht veränderbares digitales Filter ist ziemlich hoch, insbesondere dann, wenn es in Verbindung mit kontinuierlichen Systemen eingesetzt werden soll, wenn also A/D- und D/A-Wandler erforderlich sind. Andererseits bietet die Digitaltechnik ideale Speichermöglichkeiten, alle für die Programmierung erforderlichen Daten können abgespeichert werden, und das Einlesen der Daten kann bequem über automatische Eingabegeräte erfolgen. Es bietet sich also an, ein digitales Filter zu konzipieren, dessen Struktur weitgehend festliegt und dessen Koeffizienten frei programmierbar sind. Ein solcher Spezialrechner unterscheidet sich vom allgemeinen Digitalrechner dadurch, daß nur die Daten eingegeben werden können, während der Programmablauf per Verdrahtung festliegt. Er ist daher wesentlich billiger, da er viel weniger Komponenten enthält, und im Filterbetrieb viel schneller als ein entsprechend programmierter Digitalrechner, da keine Zeit für Organisation und Befehlsinterpretation verloren geht.

6.4.2 Ein praktisch aufgebautes Filter

6.4.2.1 Allgemeine Entwurfsüberlegungen

Über die Erfahrungen beim Aufbau eines rekursiven digitalen Filters, das für den Einsatz in einem "Touch-tone"-Telephonvermittlungssystem konzipiert war, ist von Jackson et. al. in /34/ berichtet worden. Diese Arbeit kann als richtungsweisend für die

Entwicklung digitaler Filter bezeichnet werden und wird im folgenden noch öfter zitiert werden.

Angeregt durch neuere Arbeiten auf dem Gebiet der Approximation eines gewünschten Frequenzganges für ein nichtrekursives Filter /49, 50, 51/, wurde ein solches digitales Filter entwickelt.

Bei geeigneten Koeffizienten haben diese Filter eine exakt konstante Gruppenlaufzeit, es existiert also kein äquivalentes kontinuierliches System.

Bei der Frage nach einer geeigneten Struktur bietet sich zunächst die direkte Form (Echoentzerrer) an, Bild 6.1.

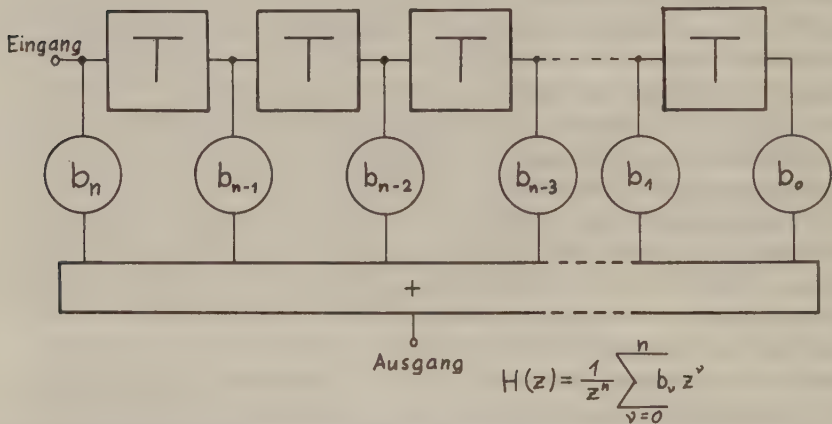


Bild 6.1: Nichtrekursives digitales Filter in direkter Form

Diese Struktur läßt sich auch unter Verwendung nur eines Multiplizierers sehr gut in Multiplextechnik aufbauen, Bild 6.2. Durch die Multiplexanordnung werden auf Kosten der möglichen Geschwindigkeit Multiplizierer eingespart, außerdem tritt eine zusätzliche Verzögerung um eine Abtastperiode auf, was aber im allgemeinen nicht stört. Ein Filter dieser Art ist bei der Firma Electronic Communications /52/ entwickelt worden.

Die Ziffern neben den Schaltern am Eingang und Ausgang deuten den Teilzyklus an, in dem der Schalter die betreffende Lage ein-

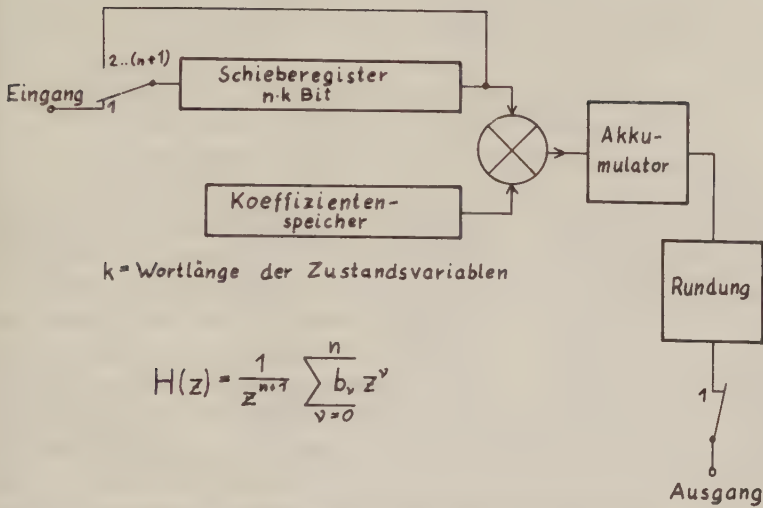


Bild 6.2: Nichtrekursives Filter in direkter Form, Multiplexschaltung eines Multiplizierers

nimmt. Eine Abtastperiode T besteht aus $(n+1)$ Teilzyklen, da mit insgesamt $(n+1)$ Koeffizienten multipliziert werden muß. Für linearphasige Systeme gilt $b_v = b_{n-v}$, es sind daher nur noch $\frac{n}{2} + 1$ (für gerade n) bzw. $\frac{n+1}{2}$ (für ungerade n) verschiedene Koeffizienten vorhanden. Man kann eine Addition vor die Multiplikation ziehen und spart in der Schaltung nach Bild 6.1 entsprechend viele Multiplizierer (Bild 6.3).

Ein besonderer Vorteil der direkten Form liegt darin, daß das im Filter erzeugte Rundungsrauschen auf das kleinstmögliche Maß reduziert wird, da nur einmal unmittelbar vor dem Ausgang gerundet wird. Die Struktur wurde dennoch verworfen, da Empfindlichkeitsuntersuchungen von Herrmann und Schüßler /53/ zeigten, daß bei endlicher Wortlänge der Koeffizienten in der Regel Dämpfungspole verloren gehen, weil die entsprechenden Nullstellen der Übertragungsfunktion nicht auf dem Einheitskreis zu halten sind. Daher ergeben sich Schwierigkeiten bei der Realisierung hochsperrender Filter.

Die in /53/ vorgeschlagene Alternative einer Kaskadenschaltung von Blöcken vierten Grades, bei denen im Falle linearphasiger

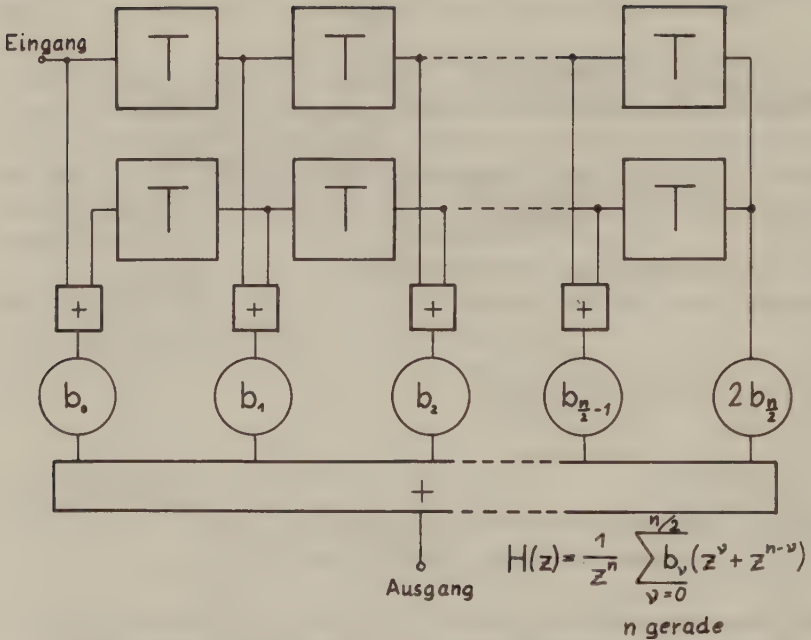


Bild 6.3: Nichtrekursives, linearphasiges digitales Filter in direkter Form, Einsparung von Multiplizierern

Filter ebenfalls die Hälfte der Multiplizierer eingespart werden kann, erwies sich wegen erheblicher Aussteuerungsprobleme als nicht zweckmäßig, wie im folgenden erläutert wird.

Wie in /53/ ausgeführt wurde, läßt sich für ein linearphasiges Filter (und diese sind vornehmlich von Interesse) vom Grade $N = 4l$ stets eine Kaskadenschaltung von l Blöcken 4. Grades angeben, die selbst linearphasig sind und daher in der Struktur nach Bild 6.3 mit nur drei Multiplizierern realisiert werden können. Filter vom Grade $N \neq 4l$ kann man so im Grad auf $N' = 4l$ erhöhen, daß nur ihre Laufzeit verändert wird, nicht jedoch der Dämpfungsverlauf.

Für die Nullstellen der Teilblöcke 4. Grades gibt es drei Möglichkeiten:

- a) Zwei konjugiert komplexe Nullstellenpaare auf dem Einheitskreis (Dämpfungspole)

- b) Ein konjugiert komplexes Nullstellenpaar auf dem Einheitskreis und zwei reelle Nullstellen, die zum Einheitskreis spiegelbildlich liegen
- c) Ein Nullstellenquadrupel, bestehend aus zwei konjugiert komplexen Nullstellenpaaren, die zum Einheitskreis spiegelbildlich liegen.

Blöcke der letztgenannten Art bereiten für die Realisierung erhebliche Schwierigkeiten. Ihre Übertragungsfunktion zeigt ein gegenüber der Übertragungsfunktion des Gesamtfilters geradezu konträres Verhalten: Sie hat ein Minimum des Betrages im Durchlaßbereich des Filters. Zahlenwertrechnungen /54/ haben gezeigt, daß bei üblichen Filtern dieses Minimum um bis zu 10^{-3} mal kleiner sein kann als das im Sperrbereich liegende Maximum. Da der Aussteuerungsbereich des Filters selbstverständlich auch im Sperrbereich nicht überschritten werden darf, bedeutet das, daß diese Blöcke im Durchlaßbereich des Filters auch nicht annähernd ausgesteuert werden können, der Dynamikbereich wird schlecht.

Man kann durch geschickte Anordnung der Teilblöcke diesem Effekt entgegenwirken: Da nicht die Teilübertragungsfunktion des Einzelblockes, sondern die des Teilfilters vom Eingang des Filters bis zum Ausgang des entsprechenden Blockes für die Aussteuerung maßgeblich ist und da die Blöcke der Art a) ein günstiges Verhalten zeigen, kann man durch Optimierung der Reihenfolge die Dynamik verbessern; jedoch sind bei so extrem ungünstigem Verhalten der Einzelblöcke der Optimierung Grenzen gesetzt.

Spaltet man die Blöcke 4. Grades in zwei Blöcke 2. Grades auf, so gewinnt man zwei entscheidende Vorteile:

1. Da die beiden Blöcke 2. Grades identischen Betragsverlauf haben, tritt der oben geschilderte Effekt in jedem der Blöcke nur noch mit der Quadratwurzel des oben genannten Verhältnisses vom Maximum zu Minimum auf.
2. Da die Anzahl der Blöcke doppelt so groß ist, wird die Flexibilität in der Anordnung wesentlich vergrößert, es besteht ein größerer Freiheitsgrad für die Optimierung der Reihenfolge.

Aus diesen Gründen wurde für die Struktur die Kaskadenschaltung

von Blöcken 2. Grades gewählt (Bild 6.4). Diese Struktur wurde für rekursive Filter bisher ausschließlich angewendet und kann auch in Multiplexerschaltung betrieben werden /34/, Bild 6.5, Seite 91.

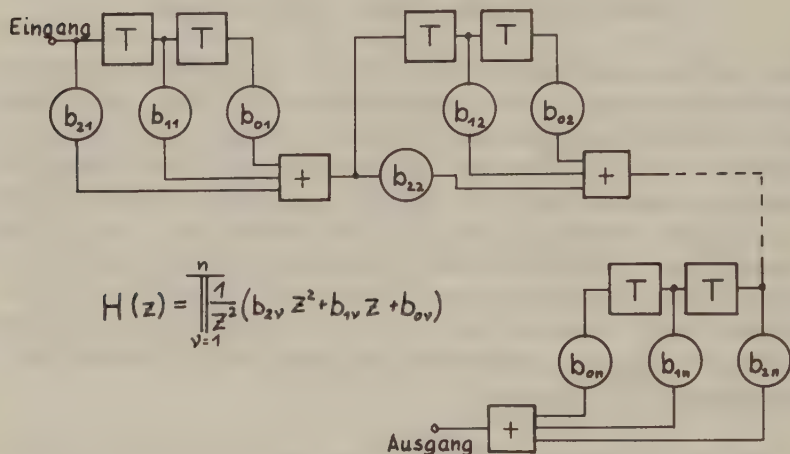


Bild 6.4: Nichtrekursives Filter in Kaskadenschaltung von Blöcken 2. Grades

In dieser Struktur muß nach jedem Block 2. Grades gerundet werden, das im Filter erzeugte Rundungsrauschen ist größer als bei der direkten Form. Andererseits kann auch bei Verkürzung der Koeffizienten-Wortlänge stets erzwungen werden, daß die Nullstellen der Übertragungsfunktion auf dem Einheitskreis liegen, denn die quadratische Gleichung

$$b_2 z^2 + b_1 z + b_0 = 0$$

hat für $|b_1| \leq 2 |b_2|$ stets die Lösungen

$$z_{01,2} = e^{\pm j\alpha}.$$

Auch die exakt lineare Phase kann sichergestellt werden, denn zu einer Teilübertragungsfunktion

$$H_1(z) = \frac{1}{z^2} (b_2 z^2 + b_1 z + b_0)$$

kann stets eine zweite gebildet werden

$$H_2(z) = \frac{1}{z^2} (b_0 z^2 + b_1 z + b_2) ,$$

so daß das Produkt symmetrische Koeffizienten hat.

$$H_1(z) \cdot H_2(z) = \frac{1}{z^4} (b_0 b_2 z^4 + b_1 (b_0 + b_2) z^3 + (b_1^2 + b_2^2 + b_0^2) z^2 + b_1 (b_0 + b_2) z + b_0 b_2) \quad (6.1)$$

Wegen des - verglichen mit der direkten Form - ungünstigeren Rauschverhaltens der Kaskadenanordnung steht zu erwarten, daß für spezielle Filter günstigere Strukturen angegeben werden können; jedoch verspricht die gewählte Kaskadenform gute Ergebnisse für das in dieser Arbeit behandelte Problem der Synthese beliebiger Filter durch Veränderung der Koeffizienten bei unveränderlicher Struktur.

Nach der Festlegung der Struktur gilt die nächste Frage der Codierung und der Arithmetik. Beide Fragen können nur im Zusammenhang mit der Auswahl geeigneter Bauelemente entschieden werden. Hier fällt die Wahl zweifelsfrei auf die gesättigte Transistor-Transistor-Logik (TTL). Diese digitale Bausteinfamilie ist heute mit der größten Typenvielfalt auf dem Markt erhältlich /55/, die Preise sind nicht nur relativ, bezogen auf die Leistungsfähigkeit, sondern auch absolut die niedrigsten. Lediglich bei den Flipflop-Speichern bietet die MOS-Technologie heute mehr. Man muß daher im Einzelfall entscheiden, ob sich ein gemischter Aufbau, d.h. MOS-Speicher und TTL-Verknüpfungselemente, lohnt. Der Leistungsbedarf ist allerdings ganz erheblich, das bedeutet jedoch für ein vom Netz betriebenes Laborgerät, wie es hier entwickelt wird, keinen gravierenden Nachteil.

Eine überschlägige Abschätzung zeigt, daß mit TTL-Bausteinen Bit-Taktfrequenzen in der Größenordnung 10 MHz erreichbar sind: die einzelnen Flipflops sind bis mindestens 15 MHz spezifiziert, die meisten Typen sogar weit höher, das bedeutet eine Mindestperiodendauer für den Takt von ≈ 65 ns. Rechnet man zwei bis drei Gatterlaufzeiten (ca. 15 - 40 ns) für die zwischen den Flipflops erforderlichen Verknüpfungen, so kommt man auf eine Periodendauer von 70 - 105 ns, d.h. Taktfrequenzen in der Größenordnung 10 MHz. Für ein digitales Filter, das im Audibereich arbeiten soll, d.h. mit Abtastfrequenzen von einigen 10 kHz, besteht daher die Schwierigkeit nicht darin, hinreichend schnelle Schaltungen zu entwickeln, sondern unter Ausnutzung der Qualitäten der gewählten TTL-Bausteine diese wirtschaftlich in viel

langsameren Systemen einzusetzen. Es ist daher zweckmäßig, serielle Arithmetik zu verwenden und außerdem die Rechenwerke in Multiplextechnik auszunützen. Beides ist auch in dem in /34/ beschriebenen Gerät bereits angewendet worden.

Ebenfalls wie in /34/ wurde Festkomma-Arithmetik gewählt, d.h. die Darstellung der Zustandsvariablen erfolgt ohne Exponenten; der Exponent 0 wird per Verdrahtung in die Schaltung eingebaut. Der Grund für diese Entscheidung liegt in erster Linie in der Kompliziertheit der Gleitkomma-Arithmetik. Andererseits liegen noch keine genauen Untersuchungen vor, inwieweit sich der erhebliche Mehraufwand für Gleitkomma-Arithmetik bei der gewählten Struktur in einer Verbesserung des Signal-Geräusch-Abstandes bemerkbar macht. Berechnungen von Avenhaus /33/ an rekursiven digitalen Filtern in Kaskadenschaltung von Blöcken 2. Grades haben Beispiele gebracht, bei denen die Gleitkomma-Arithmetik sogar schlechter war.

Die allgemeinen Überlegungen sind bis jetzt soweit gediehen, daß die speziellen Daten für das Filter festgelegt werden können. Aufgrund der Untersuchungen von Avenhaus /33/ für rekursive Filter und der Ergebnisse von Herrmann und Schüssler /53/ für den Frequenzgang nichtrekursiver Filter wurde die Wortlänge sowohl für den Koeffizienten als auch für die Zustandsvariable auf 16 Bit festgelegt. Viele TTL-Bausteine enthalten logische Verknüpfungen für jeweils 4-stellige Eingangs- und Ausgangsgrößen, sinnvolle Alternativen wären daher 12 oder 20 Bit gewesen, ersteres erschien zu wenig, letzteres zu viel. Das ungerundete Ergebnis der Multiplikation hat daher 31 Bit Wortlänge. Rechnet man einen Bittakt hinzu, der erforderlich werden kann, um die Akkumulation von Laufzeiten zu vermeiden, erhält man für den Block 2. Grades eine Zykluszeit von 32 Bittakt-Perioden. Mit $10,24$ MHz Taktfrequenz, die nach dem oben ausgeführten erreichbar sind, ergibt sich eine Abtastfrequenz von 320 kHz, die durch l -fachen Multiplexbetrieb auf $\frac{320}{l}$ kHz reduziert wird. Gewählt wurde $l = 16$, d.h. der Filtergrad ist maximal $N = 32$ und die Abtastfrequenz bei diesem Filtergrad $= 20$ kHz. Das Blockschaltbild ist in Bild 6.5 (Seite 91) angegeben.

Als letztes ist noch die Codierung festzulegen. Die Anforderungen an den Code sind:

1. Redundanzfreie Zahlendarstellung, um bei gegebener Wortlänge den größten Dynamikbereich zu erzielen
2. gute Recheneigenschaften

Beide Anforderungen erfüllt der Zweierkomplement-Code. Er ist bei allen bisher bekanntgewordenen Ausführungen digitaler Filter ausschließlich angewendet worden. Für den Einsatz in nichtrekursiven Filtern ist seine Eigenschaft des selbstkorrigierenden Überlaufs ganz besonders wichtig, da hier häufig Koeffizienten auftreten, die wesentlich größer als eins sind. Wird eine Summe aus mehr als zwei Summanden gebildet, wobei sowohl die Summanden als auch die Summe den darstellbaren Zahlenbereich nicht verlassen, so wird bei Rechnung im Zweierkomplement das Ergebnis auch dann richtig, wenn die Zwischensummen größer werden als der darstellbare Zahlenbereich.

Der Zweierkomplement-Code ist entwickelt worden, um die Subtraktion zweier Zahlen auf die Addition zurückzuführen. Es seien a und b zwei im Dualcode dargestellte Zahlen:

$$a = \sum_{\rho=0}^{r-1} \alpha_{\rho} 2^{\rho}, \quad 0 \leq a \leq 2^r - 1, \quad \alpha_{\rho} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$b = \sum_{\rho=0}^{r-1} \beta_{\rho} 2^{\rho}, \quad 0 \leq b \leq 2^r - 1, \quad \beta_{\rho} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

Die Subtraktion läßt sich dann wie folgt darstellen:

$$d = a - b = a + (2^r - b) - 2^r \quad (6.2)$$

Die Zahl $\hat{b} = 2^r - b$ ist die Zweierkomplementdarstellung von $-b$. Sie ist leicht zu gewinnen, denn es gilt:

$$2^r - b = (2^r - 1 - b) + 1$$

Die Zahl $(2^r - 1 - b)$ ist die Einerkomplementdarstellung von $-b$ und entsteht aus b dadurch, daß alle β_{ρ} invertiert werden:

$$2^r - 1 - b = \sum_{\rho=0}^{r-1} \bar{\beta}_{\rho} 2^{\rho}$$

Damit ist die Bildungsvorschrift für das Zweierkomplement hergeleitet. Man verifiziert leicht, daß bei serieller Verarbeitung eine weitere gilt: man läßt von dem letzten, d.h. vom Bit kleinster Wertigkeit (LSB) beginnend, alle Stellen bis zur ersten 1 einschließlich unverändert, die auf die erste 1 folgenden höher-

wertigen werden invertiert.

Der Zweierkomplement-Code besteht nun darin, daß alle positiven Zahlen im Dualcode und alle negativen im Zweierkomplement dargestellt werden. Für eine r -stellige Zahl ergibt sich der Wertebereich:

$$-2^{r-1} \leq c \leq 2^{r-1} - 1$$

$$c = -c_{r-1}2^{r-1} + \sum_{\rho=0}^{r-2} c_{\rho}2^{\rho}, \quad c_{\rho} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad \rho = 0(1)r-1 \quad (6.3)$$

Die Stelle mit der höchsten Wertigkeit, c_{r-1} (MSB), ist auch hier signifikant für das Vorzeichen ($0 \hat{=} "+"$, $1 \hat{=} "-"$), wird jedoch in der Rechnung wie eine Wertigkeitsstelle behandelt. Die in Gleichung (6.2) noch enthaltene abschließende Subtraktion von 2^r entfällt, da 2^r gemäß Gleichung (6.3) mit r Stellen nicht darstellbar ist.

6.4.2.2 Entwicklung der Schaltungen

In Fortführung der bisherigen allgemeinen Entwurfsüberlegungen sollen im folgenden Abschnitt die wichtigsten Baugruppen des digitalen Filters bis zum Blockschaltbild entwickelt werden. Bild 6.5 zeigt das Blockschaltbild des gesamten Filters.

Die Schaltung ist nach den vorherigen Ausführungen bis auf den Zeitausgleich klar. Durch ihn wird die bei der Multiplikation anfallende Verarbeitungszeit ergänzt zu einer vollen Zykluszeit von 32 Bittakten, da erst danach die Multiplizierer die nächste Rechenoperation vornehmen können. Die Verzögerung der Multiplizierer beträgt 16 Bittakte τ . Die übrigen Elemente der Schaltung: der elektronische Umschalter am Eingang, die Addierer und die Rundungsschaltung sind reine Zuordner, d.h. sie benötigen für ihre Funktion nicht einen oder mehrere Bittakte τ . Der Zeitausgleich muß daher insgesamt eine weitere Verzögerung um 16 Bittakte τ bewirken. Diese Verzögerung ist nicht geschlossen durch ein 16-stelliges Schieberegister realisiert, sondern wurde aufgeteilt in kürzere Schieberegister und einzelne Flipflop's, die zwischen den Zuordnern liegen und dadurch eine Akkumulation von Gatterlaufzeiten verhindern, durch die die mögliche Taktfrequenz verringert

worden wäre.

Außerdem ist noch eine Schaltung eingebaut, mit der der Zeit-
ausgleich um 0 bis p Bittakte τ verlängert werden kann. p ist
eine an der Frontplatte des Gerätes einzustellende zweistelli-
ge Dualzahl. Eine Verzögerung um $p \cdot \tau$ bedeutet bei serieller Arith-
metik eine Multiplikation mit 2^p , d.h. mit der Größe p kann das
Ergebnis der Multiplikation um 2^p verstärkt werden. In den Fest-
komma-Multiplizierern werden die Koeffizienten als Zahlen vom
Betrag kleiner als Eins interpretiert, die Zahl p legt daher
die Wertigkeit aller Koeffizienten $b_{\mu\lambda}$ auf den Bereich <1 , <2 ,
 <4 oder <8 fest. Dieser Zahlenbereich ist ausreichend.

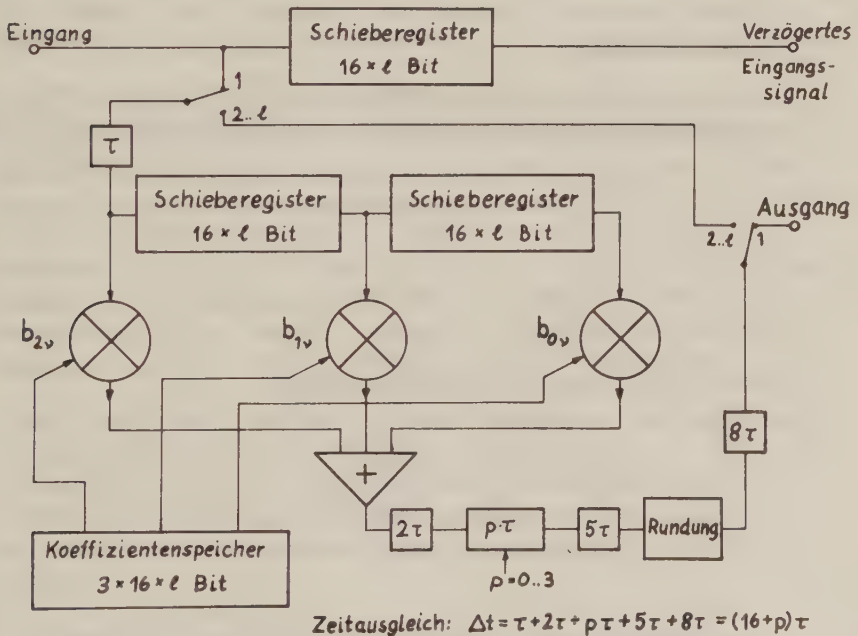


Bild 6.5: Blockschaltbild des nichtrekursiven digitalen
Filters 32. Grades in Multiplexerschaltung eines
Blockes 2. Grades

Die Zahlen an den Schaltern am Eingang und Ausgang beziehen sich auf die Stellung der Schalter in dem jeweiligen Wortzyklus. Ein ganzer Filterzyklus ist daher $32 \cdot l$ Bittakte lang, l gibt den Multiplexgrad an und ist (durch Schalter an der Frontplatte) einstellbar im Bereich $1 \leq l \leq 16$. Das Filter wird von einem zentralen Taktgenerator gesteuert, der im Kern aus einem 9-stelligen synchronen Binärzähler besteht und daher $2^9 = 32 \cdot 16$ verschiedene Taktzustände unterscheidet.

Von den im Bild 6.5 dargestellten Baugruppen soll auf die Multiplizierer, die Zustandsvariablenspeicher und den Koeffizientenspeicher näher eingegangen werden.

Der Multiplizierer

Es werde zunächst die Multiplikation zweier Zahlen betrachtet, die als positive Zahlen im Dualcode ohne Vorzeichen gegeben sind:

$$x = \sum_{i=0}^{w-1} x_i 2^i, \quad 0 \leq x \leq 2^w - 1, \quad x_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad i = 0(1)w-1$$

$$k = \sum_{\rho=0}^{r-1} k_{\rho} 2^{\rho}, \quad 0 \leq k \leq 2^r - 1, \quad k_{\rho} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \quad \rho = 0(1)r-1$$

Bild 6.6 zeigt das Multiplikationsschema:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & k_1 & k_0 \\
 & & & & & & \cdot & x_0 \\
 (k_{r-1} & k_{r-2} & \dots & & & & & \\
 & & & & & & k_1 & k_0 \\
 & & & & & & \cdot & x_1 \\
 (k_{r-1} & k_{r-2} & k_{r-3} & \dots & & & &
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{ccccccc}
 (k_{r-1} & k_{r-2} & \dots & & & & k_1 & k_0) \cdot x_{w-1} \\
 \hline
 p_{r+w-1} & p_{r+w-2} & p_{r+w-3} & \dots & & & p_1 & p_0
 \end{array}
 \end{array}$$

Bild 6.6: Multiplikationsschema für die Bildung des Produktes $x \cdot k = p$

Die Partialprodukte $(x_i \cdot k_{\rho})$ sind logische UND-Funktionen. Es gibt insgesamt $r \cdot w$ Partialprodukte. Bei rein serieller Verar-

beitung müssen diese einzeln gebildet und aufaddiert werden, das erfordert $r \cdot w$ Bittakte und ist damit sehr langsam, obwohl die Bauelemente schnell sein müssen, um mit dem schnellen Takt (ca. 10 MHz) arbeiten zu können. Günstiger ist daher der Serien-Parallelmultiplizierer, bei dem nur die Zustandsvariable x seriell einläuft, der Koeffizient k parallel anliegt. Für das Multiplikationsschema nach Bild 6.6 gibt es zwei Schaltungen, Bild 6.7.

Die Blöcke τ sind Flipflops, die jeweils um einen Bittakt τ verzögern, man erkennt am Summierer die Übertrags-Flipflops. Die Funktionsweise der beiden Schaltungen entspricht dem in Bild 6.6 angegebenen Schema: In der Schaltung nach Bild 6.7a wird jeweils eine ganze Zeile $x_1 \cdot k$ gebildet und zu der bereits bestehenden Partialsumme bei gleichzeitiger Verschiebung um eine Dualstelle aufaddiert, in der Schaltung nach Bild 6.7b geschieht dasselbe ganz entsprechend spaltenweise.

Beide Schaltungen enthalten $(r-1)$ identische Multiplizierer-Zellen und ein UND-Gatter. Die Zellen sind in beiden Schaltungen verschieden, enthalten jedoch dieselben Bauelemente, der Aufwand ist also exakt gleich. Interpretiert man die Zahlen x und p als Zahlen, die dem Betrage nach <1 sind (das ist für die Zustandsvariablen im digitalen Filter der Fall), so sind die Verzögerungszeiten bis zum Erscheinen des Bits p_{r-1} , das (gegebenenfalls nach Aufrundung, hierfür ist p_{r-2} maßgeblich) zum LSB des gerundeten Ergebnisses wird, in beiden Fällen gleich $r-1$ Taktperioden τ .

In der Schaltung a) ist die mögliche Taktfrequenz bestimmt durch die Laufzeit durch ein UND-Gatter und einen Addierer, in der Schaltung b) durch die Laufzeit durch ein UND-Gatter und $(r-1)$ Addierer. Die Schaltung ist daher in dieser Form nicht brauchbar. Bild 6.8 zeigt eine mögliche Verbesserung der Multiplizierer-Zelle.

Die beiden zusätzlichen Flipflops verhindern die Akkumulation der Laufzeiten, dafür wird die Verzögerungszeit bis zum Eintreffen von p_{r-1} am Ausgang auf $2(r-1)$ Taktperioden τ verdoppelt. Soweit ist noch kein Vorteil für die Schaltung b) erkennbar, im Gegenteil, es werden $2(r-1)$ Flipflops zusätzlich benötigt.

Will man jedoch einen Multiplizierer bauen, bei dem die Rundung eingeschlossen ist, an dessen Ausgang also unmittelbar das gerundete Produkt mit nur w Bit Wortlänge erscheint, und fordert man zusätzlich, daß sowohl x als auch p (gerundet) ohne Pausen-

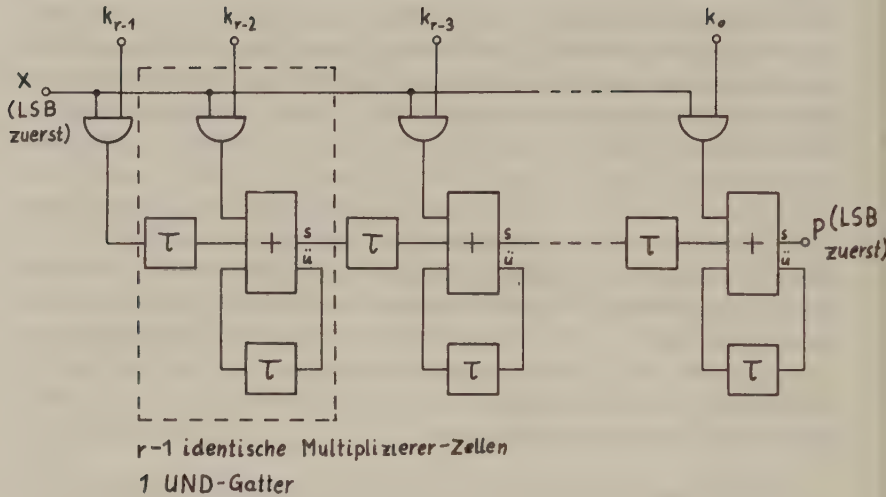


Bild 6.7a: Erste Schaltung für die Multiplikation nach Bild 6.6

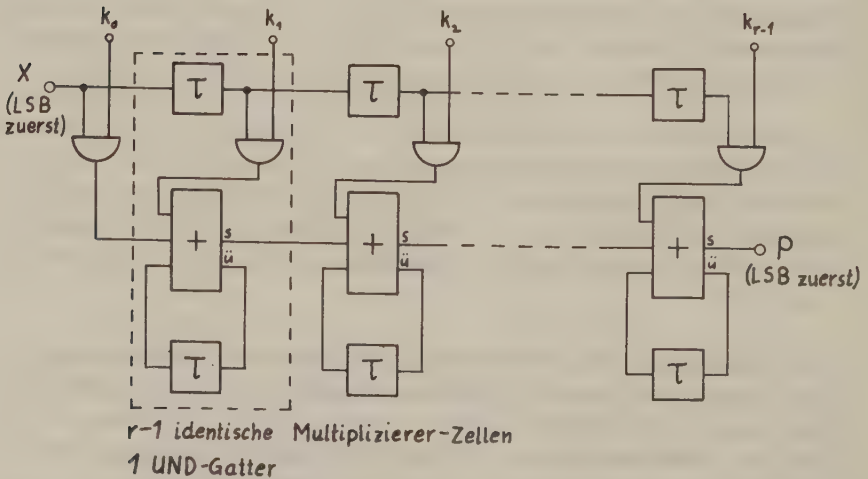


Bild 6.7b: Zweite Schaltung für die Multiplikation nach Bild 6.6

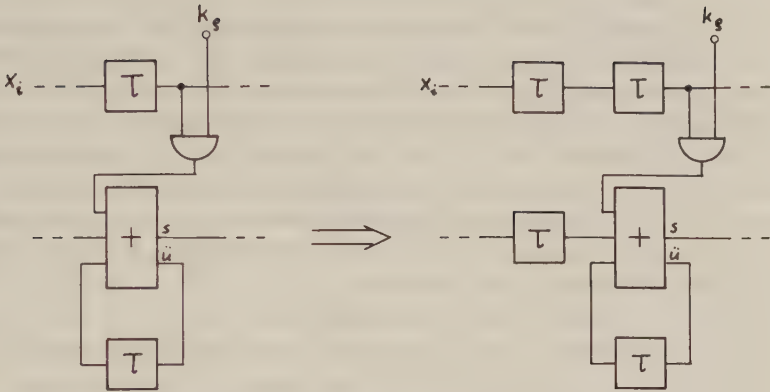


Bild 6.8: Verbesserte Multiplizierer-Zelle für die Schaltung nach Bild 6.7b

zeiten ein- bzw. auslaufen, so besteht bei der Schaltung b) die Möglichkeit, diese Forderung durch zusätzliche UND-Gatter zu erfüllen, Bild 6.9.

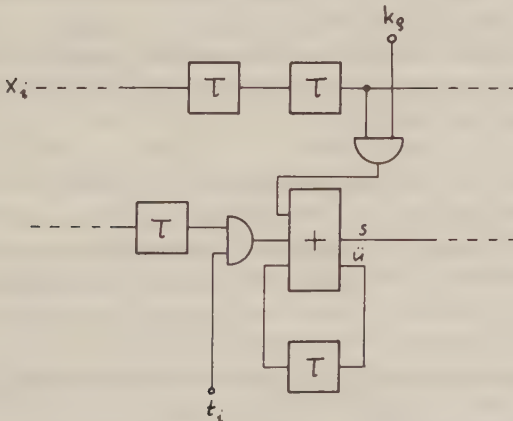


Bild 6.9: Multiplizierer-Zelle für Schaltung b), Rundung ist in den Multiplizierer einbezogen.

Durch einen geeigneten Takt an t_i erreicht man jetzt, daß jeweils die letzte Stelle jeder Partialsumme unterdrückt wird. Das bedeutet keinen Informationsverlust, da diese einzelne Stelle kei-

nen Übertrag produzieren kann und daher auf die ersten w Stellen der folgenden Partialsumme keinen Einfluß hat. Lediglich bei der letzten Partialsumme (= Endsumme) muß das $(w+1)$ -te Bit (= p_{r-2}) anderweitig für die Rundung verwendet werden. Der hier beschriebene Multiplizierer wurde in /34/ eingesetzt. Dabei wurde die Zustandsvariable vor der Multiplikation vom Zweierkomplement-Code in eine Dualzahl mit Vorzeichen umgewandelt, ebenso wurde der Koeffizient nach Betrag und Vorzeichen eingegeben. Die Beträge wurden multipliziert und das Vorzeichen gesondert durch eine Antivalenzschaltung bestimmt.

Diese Vollaussnutzung des Multiplizierers bringt gegenüber der Schaltung a), bei der das nicht möglich ist, einen Gewinn um den Faktor $\frac{w+r}{r}$ an Verarbeitungsgeschwindigkeit, für $r = w$ ist das der Faktor 2. Es ist jedoch zu bedenken, daß ein Multiplizierer der geschilderten Art nur noch $(r-1)$ Addierer weniger hat als zwei Multiplizierer nach a), mit denen der gleiche Zeitgewinn erzielt wird. Außerdem ist die Vollaussnutzung nur möglich, wenn eine geeignete Multiplexausnützung angewandt werden kann: da das Ergebnis erst nach $2(r-1)$ Takten erscheint, der Multiplizierer aber nach w Takten die nächste Eingangsgröße verarbeiten kann, muß zwischendurch ein anderes Signal eingeschoben werden, das nicht erst aus dem Multiplizierer-Ergebnis gewonnen wird. Eine solche Multiplexausnützung liegt z.B. vor, wenn das Filter im Kanalmultiplex ausgenützt wird.

Kanalmultiplex war für das hier entwickelte digitale Filter nicht vorgesehen, außerdem sollte die Möglichkeit erhalten bleiben, zwischendurch mit doppelter Genauigkeit zu rechnen und nur eine Rundungsstelle pro Block 2. Grades zu erhalten, es wurde deshalb die Schaltung a) aufgebaut. Durch eine kleine Erweiterung wurde sie so modifiziert, daß die Codewandlung entfällt und die Zahlen x und p unmittelbar im Zweierkomplement-Code dargestellt werden.

Die Summendarstellung von Gl. (6.3) für eine Zahl im Zweierkomplement-Code kann man auch schreiben

$$c = \sum_{\rho=0}^{r-1} \gamma_{\rho} 2^{\rho} ; \gamma_{\rho} = \begin{cases} 0 & \text{für } \rho = 0(1)r-2 \\ 1 & \end{cases} \quad \gamma_{r-1} = \begin{cases} 0 \\ -1 \end{cases} \quad (6.4)$$

Man kann nun eine spezielle Arithmetik entwickeln, die berücksichtigt, daß die logische 1 für die Stellen c_0 bis c_{r-2} eine arithmetische 1 und für die Stelle c_{r-1} eine arithmetische -1 ist. Eine sehr elegante Lösung ist in /56/ beschrieben, es wurden dafür eigene integrierte Schaltkreise entwickelt.

Für den Benutzer handelsüblicher Logikschaltkreise ist dieser Weg kaum gangbar. Man kann aber bei serieller Arithmetik eine einfache Korrekturschaltung angeben.

Interpretiert man die im Zweierkomplement-Code dargestellte Zahl x als Betrag einer Dualzahl ($\tilde{x}$), so hat $\tilde{x}$ den Wert (Gl. 6.2):

$$\tilde{x} = 2^w - x$$

Multipliziert man nun eine solcherart interpretierte Zahl mit dem Betrag des Koeffizienten k , so ergeben sich zwei Möglichkeiten:

a) $x \geq 0 \rightarrow \tilde{x} \cdot |k|$ ist das richtige Ergebnis

b) $x < 0 \rightarrow \tilde{x} \cdot |k| = (2^w - |x|) |k| = 2^w |k| - |x| |k|$

Das richtige Ergebnis lautet $2^{w+r} - |k| |x|$.

Der Anteil 2^{w+r} ist uninteressant, da er nur einen Überlauf darstellt. Vom Ergebnis der Multiplikation ist also die Zahl $2^w \cdot |k|$ abziehen. Das leistet eine einfache Korrekturschaltung.

Für negative Koeffizienten k wird zunächst gerechnet wie oben, anschließend wird das (gegebenenfalls korrigierte) Ergebnis komplementiert.

Ein Multiplizierer dieser Art wurde im Rahmen einer Diplomarbeit /57/ entwickelt und in dem Filter eingesetzt. Für den zur Rechnung parallel benötigten Koeffizienten ist noch ein Serien-Parallel-Register eingebaut worden, so daß der Koeffizient seriell eingelesen wird. Das ist aus Verdrahtungsgründen vorteilhaft für den Anschluß des Koeffizientenspeichers, außerdem ist das Register für die Korrekturaddition erforderlich, die seriell erfolgt.

Der Zustandsvariablenspeicher

Die beiden identischen Zustandsvariablenspeicher (Bild 6.5) enthalten je 16×16 Bit Speicherplätze. Die Zustandsvariable läuft seriell mit dem Bittakt von ca. 10 MHz ein bzw. aus. Die Speicher müssen mit der an der Frontplatte einstellbaren Zahl l auf $16 \times l$ Bit, $l = 1(1)16$ verkürzbar sein. Bild 6.10 zeigt die Schaltung.

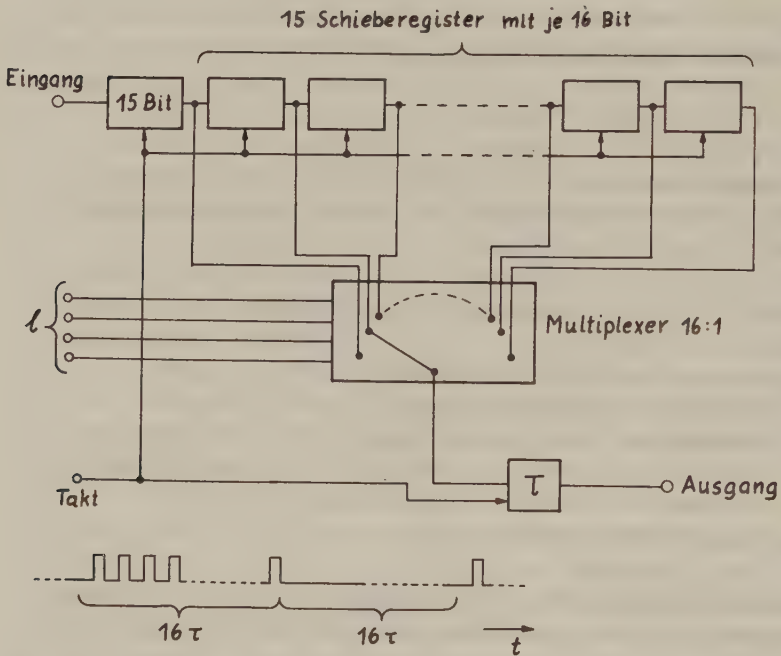


Bild 6.10: Schaltung des Zustandsvariablenspeichers

Durch die vierstellige Dualzahl l wird bestimmt, welcher Abgriff der Schieberegisterkette zum Ausgang durchgeschaltet wird. Das erste Schieberegister ist nur 15 Bit lang, das 16. Flipflop liegt unmittelbar vor dem Ausgang. Es wird dadurch vermieden, daß die Laufzeit durch den Multiplexer sich zu der Laufzeit des dem Speicher nachgeschalteten Multiplizierers (Bild 6.5) addiert, was die mögliche Taktfrequenz herabgesetzt hätte.

Obwohl die Zykluszeit ($= 32 \tau$) hinreichend groß ist, um parallel arbeitende MOS-Speicher einzusetzen, empfiehlt sich deren Verwendung hier nicht, da die erforderliche Parallel-Serien-Wandlung am Eingang und Serien-Parallel-Wandlung am Ausgang recht aufwendig würde. Außerdem ist die Einstellung der Länge durch λ komplizierter, da an jedem Abgriff der Verzögerungskette 16 parallel anliegende Bits durchgeschaltet werden müßten.

Der Koeffizientenspeicher

Der Koeffizientenspeicher muß Speicherplatz für 3 mal 16 Koeffizienten (d.h. 768 Bit) enthalten. Das ist für einen Kernspeicher zu klein, es kommen daher nur Flipflopspeicher in Frage. Die zum Auslesen eines Koeffizienten zur Verfügung stehende Zeit beträgt 32τ , d.h. minimal ca. $3 \mu s$. Der Koeffizient wird seriell mit dem Bittakt (ca. 10 MHz) in das Multipliziererregister eingelesen. Der Koeffizientenspeicher zerfällt in drei identische Teile mit je 256 Bit Speicherplatz, die je einem der Multiplizierer zugeordnet sind. Die Koeffizienten werden mit Hilfe eines externen Eingabegerätes eingelesen und beim Filterbetrieb entsprechend dem eingestellten Multiplexgrad λ ausgelesen, die Steuerung kommt dann vom Taktgenerator her. Bild 6.11 zeigt eine Anordnung mit Schieberegistern als Speicher.

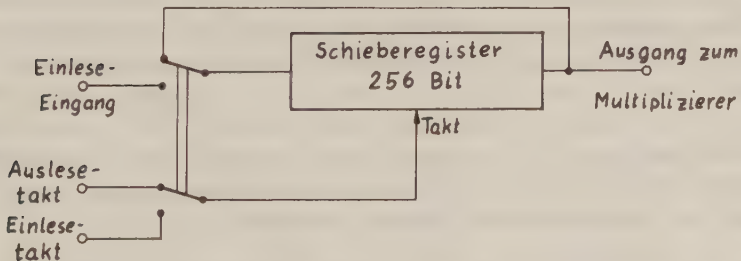


Bild 6.11: Koeffizientenspeicher mit Schieberegistern

Eine Verringerung des Multiplexgrades (weniger als 16 Koeffizienten pro Multiplizierer) ist möglich, wenn für das Schieberegister eine verkürzbare Anordnung gewählt wird wie für den Zustandsvari-

ablenspeicher (Bild 6.10).

Die Anordnung hat den Nachteil, daß die Koeffizienten ständig umlaufen. Tritt im Dauerbetrieb durch eine Störung ein Bitfehler auf, wird ein Koeffizient verfälscht und das Filter ändert seine Eigenschaften.

Wesentlich störsicherer ist eine Anordnung, bei der die Koeffizienten in Speicherzellen stehen, die über eine Adressenschaltung angewählt und je nach Betriebsart überschrieben (Einlesen) oder zerstörungsfrei ausgelesen (Filterbetrieb) werden können. Entsprechende Bausteine hierfür sind auf dem Markt als Schreib-Lese-Speicher (Random Access Memories, RAM's) erhältlich. Die Lösung hat zudem den Vorteil, daß man für spezielle Filter die Schreib-Lese-Speicher durch festprogrammierte Speicher (Read Only Memories, ROM's) ersetzen kann, die Koeffizienten sind dann auch nach Abschalten der Betriebsspannung nicht gelöscht.

Schreib-Lese-Speicher sind sowohl in MOS- als auch in bipolarer Technik erhältlich. Letztere zeichnen sich durch die wesentlich kleineren Zugriffszeiten aus und sind bei so geringem Gesamt-speicherplatzbedarf wie in der vorliegenden Anwendung auch im Preis konkurrenzfähig. Für das Filter wurde ein bipolarer Schreib-Lese-Speicher ausgewählt, der 256 Worte mit je 1 Bit speichert. Der Baustein ist voll dekodiert, d.h. die 256 Worte werden durch eine 8-stellige Dualadresse angewählt. Die Zugriffszeit beträgt maximal 105 nsec (Intersil IM 5503). Diese Zugriffszeit reicht für den gewünschten Bittakt von ca. 10 MHz noch nicht ganz aus. Jedoch ist der Multipliziererzyklus 32 τ lang, der Koeffizient enthält nur 16 Bit, die während der halben Zykluszeit in das Multiplizierer-Register eingelesen werden müssen. Durch einen kleinen Zwischenspeicher ist daher noch eine Taktreduktion um den Faktor 2 für die Ansteuerung des Koeffizientenspeichers möglich. Bild 6.12 zeigt das Blockschaltbild dieses Zwischenspeichers.

Zum Einlesen der Koeffizienten sind zwei Geräte vorgesehen:

1. Ein Handeingabegerät. Der gewünschte Koeffizient (16 Bit) und seine Adresse werden an Schaltern eingestellt. Mit einem eingebauten Oszillator (ca. 300 kHz) werden die 16

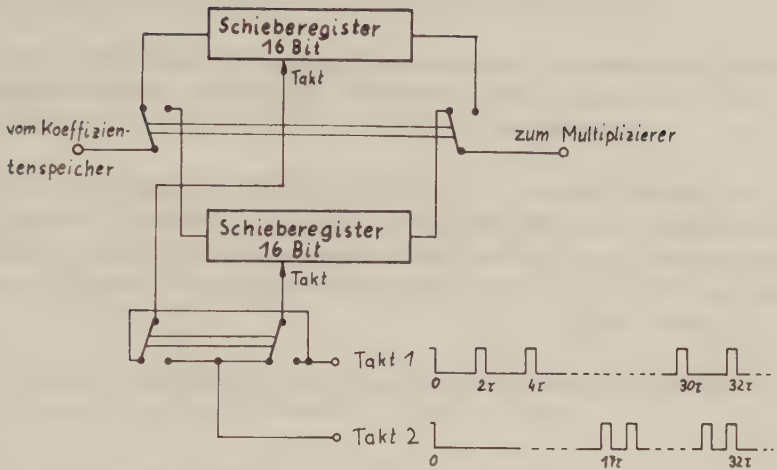


Bild 6.12: Blockschaltbild des Zwischenspeichers

Bit des Koeffizienten seriell abgefragt und in den Koeffizientenspeicher geschoben.

2. Eine automatische Eingabe über ein Lochstreifenlesegerät. Der gesamte Koeffizientensatz muß in bestimmter Reihenfolge auf dem Lochstreifen abgelocht sein, Kommentare sind zulässig. Das Steuergerät für den Lochstreifenleser trennt Kommentartext und Koeffizienten, codiert diese um vom Fernschreibcode in den Dualcode, bildet aus der Reihenfolge der Koeffizienten die entsprechende Adresse für den Speicher und liest die Koeffizienten in den Speicher ein.

Die Adressierung des Koeffizientenspeichers erfolgt also auf drei verschiedene Arten:

1. Im Filterbetrieb liefert der zentrale Taktgenerator des Filters die Adresse. Die drei Schreib-Lese-Speicher mit je 256 Bit sind je einem Multiplizierer zugeordnet und werden identisch adressiert.
2. Im Betrieb "Einlesen mit Handeingabegerät" wird die sta-

tisch eingestellte Adresse durchgeschaltet.

3. Im Betrieb "Einlesen mit Lochstreifenlesegerät" wird die von der Steuerung des Lesegerätes erzeugte Adresse durchgeschaltet.

In den Fällen 2. und 3. ist die Adressierung für die drei Schreib-Lese-Speicher ebenfalls identisch, jedoch wird über die "Enable"-Eingänge der drei Speicher nur jeweils einer aktiviert (dreistellige Adresse ($\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}$)-Code), da nur ein Koeffizient gleichzeitig eingelesen werden kann.

Bild 6.13 zeigt das Blockschaltbild des Koeffizientenspeichers.

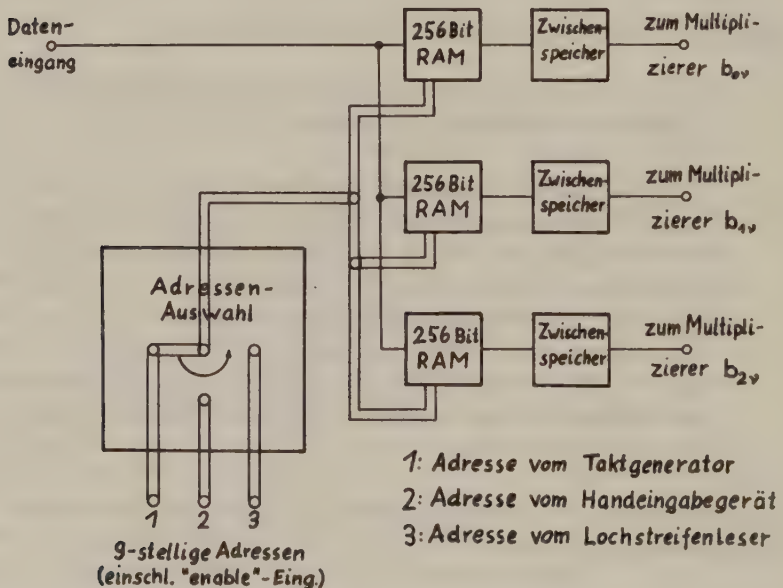


Bild 6.13: Blockschaltbild des Koeffizientenspeichers

6.4.2.3 Daten des Filters

Neben den beschriebenen für die Filteraufgabe erforderlichen Teilen enthält das Filter noch einige Baugruppen, die für Lehr- und Demonstrationzwecke gedacht sind. Hierzu gehören etwa:

1. Eine zusätzliche Verzögerungskette, die ähnlich wie der Zustandsvariablenspeicher aufgebaut ist. Es kann hiermit das Eingangssignal um die bei linearphasigen Filtern konstante Gruppenlaufzeit des Filters verzögert werden.
2. Eine Auswahlhaltung, mit der die Ausgänge der Teilblöcke 2. Grades angewählt werden können.
3. Eine Kontrollmöglichkeit für die Koeffizienten. An einer Schalterleiste auf der Frontplatte kann die Adresse eines beliebigen Koeffizienten eingestellt werden, er läuft dann in ein Schieberegister, dessen 16 Ausgänge mit Lampchen angezeigt werden.
4. Eine Möglichkeit, die interne Wortlänge zu verkürzen. Dazu wird die Eingangsgröße um 0 bis 7 Zweierpotenzen abgeschwächt und die Ausgangsgröße entsprechend verstärkt.

Die endgültigen Daten des Filters sollen hier noch einmal kurz zusammengestellt werden:

Filtergrad: $N = 2l$, l einstellbar 1(1)16

Wortlänge Koeffizient: 16 Bit

Wortlänge Zustandsvariable: 16 Bit

Bittaktfrequenz: f_T intern 10,24 MHz, extern $\leq 10,5$ MHz

Abtastfrequenz: $f_A = \frac{f_T}{32 \cdot l}$ ($= 20$ kHz für $l = 16$, $f_T = 10,24$ MHz)

Eingang: direkt im Zweierkomplementcode oder über A/D-Wandler

Ausgänge: Verzögertes Eingangssignal

Beliebig anwählbarer Zwischenausgang

Filterausgang

Alle Ausgänge sind direkt im Zweierkomplementcode oder über D/A-Wandler greifbar.

Interface-Einrichtungen für den Anschluß spezieller A/D- und D/A-Wandler sind eingebaut.

Koeffizienten: 48 Koeffizienten mit je 16 Bit, Dualcode mit Vorzeichen. Einlesen der Koeffizienten per Hand über eine Schalterleiste oder automatisch mit Lochstreifenlesegerät.

6.4.2.4 Einige Anwendungsbeispiele

Die Anwendbarkeit des beschriebenen digitalen Filters hängt selbstverständlich davon ab, welche Schwierigkeiten es macht, die zur Lösung einer gegebenen Filteraufgabe geeigneten Koeffizienten zu finden. Für viele Fälle, insbesondere selektive Filter, kann das Approximationsproblem als gelöst betrachtet werden /49, 50, 51/. Die weitere Aufgabe besteht darin, den Koeffizientensatz optimal für die gegebene Kaskadenstruktur aufzubereiten. Diese Aufgabe ist für rekursive Filter von Avenhaus bearbeitet worden /33/. Bei nichtrekursiven Filtern liegen die Verhältnisse etwas anders:

Während einer der beiden Freiheitsgrade rekursiver Filter entfällt, nämlich die Zuordnung von je einem Pol- und Nullstellenpaar zu einem Block zweiten Grades, erlaubt der zweite Freiheitsgrad, nämlich die Reihenfolge der Teilblöcke, viel mehr Variationen, da der Filtergrad im allgemeinen höher ist. Für ein Filter 32. Grades ergeben sich $16! \approx 2 \cdot 10^{13}$ Anordnungsmöglichkeiten. Liegt die Reihenfolge einmal fest, dann werden die Koeffizienten jedes Teilblockes zweckmäßig noch so skaliert, daß der Teilfrequenzgang bis zum Ausgang jedes Blockes 2. Grades an mindestens einer Stelle = 1 wird und nirgendwo > 1 . Soll die lineare Phase exakt beibehalten werden, ist diese Forderung nicht für jeden Teilblock erfüllbar: Die Koeffizienten der beiden Teilübertragungsfunktionen $H_1(z)$, $H_2(z)$ nach Gl. (6.1) dürfen sich dann nur um einen Faktor k unterscheiden, dessen Wortlänge so kurz ist, daß $k \cdot b_0$, $k \cdot b_1$, $k \cdot b_2$ exakt (d.h. ohne Rundungsfehler) mit der vorgegebenen Koeffizientenwortlänge darstellbar ist. Man hat also an diesen Blöcken, die die zweite Hälfte eines zum Einheitskreis spiegelbildlich liegenden Nullstellenquadrupels bilden, keine völlige Freiheit in der Skalierung.

Bild 6.14: Meßanordnung für die Frequenzgangmessung beim digitalen Filter

Ein Programm, das zu einer gegebenen Übertragungsfunktion eine günstige Anordnung der quadratischen Blöcke findet und die beschriebene Skalierung vornimmt, ist von Deigner und Avenhaus /54/ entwickelt worden. Das Ergebnis dieses Optimierungsprogrammes kann unmittelbar über einen Lochstreifenstanzer ausgegeben werden, d.h. man erhält sofort den Lochstreifen, mit dem man über das Lesegerät die Koeffizienten in das digitale Filter einspeichern kann. Dieses Verfahren ist sehr komfortabel und schließt vor allem Übertragungsfehler weitgehend aus.

Bei den folgenden Beispielen ist die Meßanordnung für den Frequenzgang stets dieselbe, Bild 6.14.

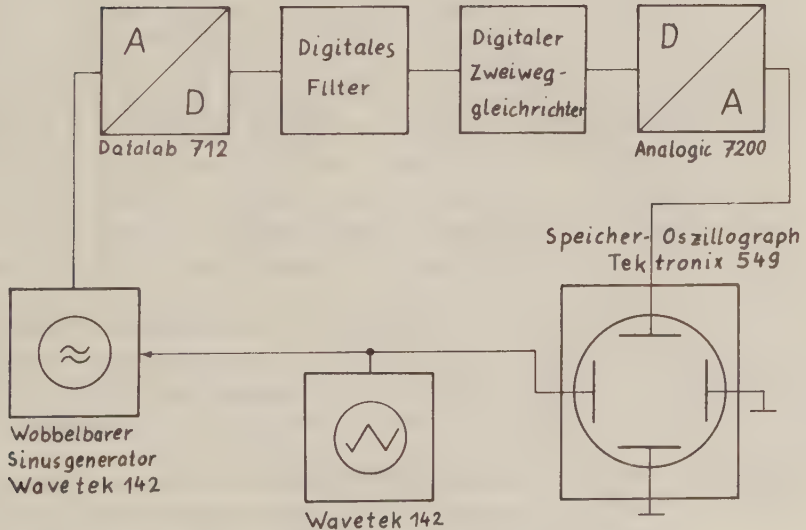


Bild 6.14: Meßanordnung für die Frequenzgangmessung beim digitalen Filter

Als erstes Beispiel wurde ein Tiefpaß nach Herrmann /49/ mit gleichmäßiger Approximation im Sperr- und Durchlaßbereich programmiert. Der Betrag der Übertragungsfunktion schwankt im Durchlaßbereich zwischen 0,9 und 1, die Mindestsperrdämpfung beträgt 40 dB.

Bild 6.15 zeigt die Pol-Nullstellenverteilung, Bild 6.16 den Frequenzgang und die Rechteckantwort. Man erkennt an der Rechteckantwort die konstante Gruppenlaufzeit.

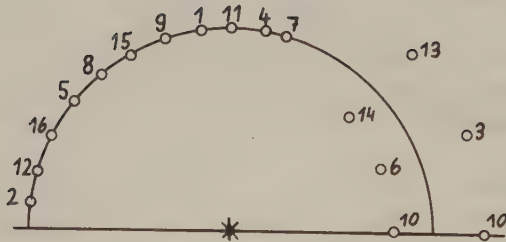


Bild 6.15: Pol-Nullstellenverteilung des Tiefpasses 32. Grades mit gleichmäßiger Approximation. Die Ziffern an den Nullstellen bezeichnen die Reihenfolge, in der die Teilblöcke mit diesen Nullstellen angeordnet sind

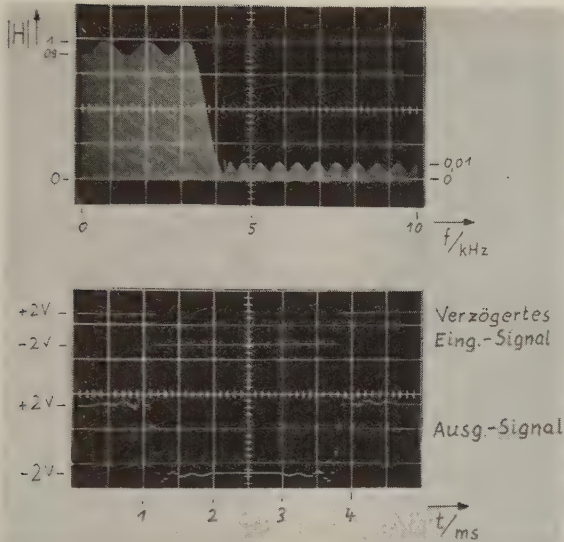


Bild 6.16: Frequenzgang (oben) und Rechteckantwort (unten) des Tiefpasses 32. Grades bei einer Abtastfrequenz von $f_A = 20$ kHz

Für dieses Beispiel sind auch die Teilfrequenzgänge bis zum Ausgang des 1., 2. 16. Blocks zweiten Grades aufgenommen worden, Bild 6.17. Man erkennt, daß die Blöcke 1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 16 jeweils Nullstellen auf dem Einheitskreis haben (vergl. Bild 6.15). Nach dem 6. Teilblock ist das Filter nicht ganz ausgesteuert, da die exakt lineare Phase erhalten bleiben sollte.

Als zweites Beispiel wurde ein Tiefpaß mit maximal flachem Frequenzgang (Butterworth-Filter) nach Herrmann /50/ programmiert. Bild 6.18 zeigt den gemessenen Frequenzgang und die Rechteckantwort. Auch hier ist die exakt lineare Phase deutlich zu erkennen.

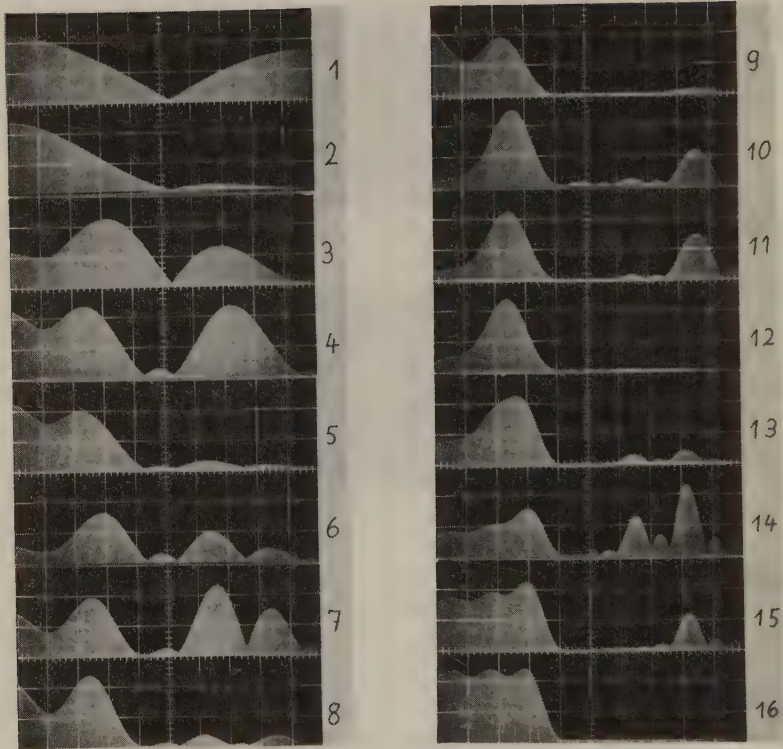


Bild 6.17: Frequenzgänge des Filters 32. Grades jeweils vom Eingang bis zum Ausgang des λ -ten Teilblocks.

Vertikalablenkung: $|H|$, "1" $\hat{=}$ 2,4 Skt

Horizontalablenkung: 1 kHz / Skt

Abtastfrequenz: $f_A = 20$ kHz

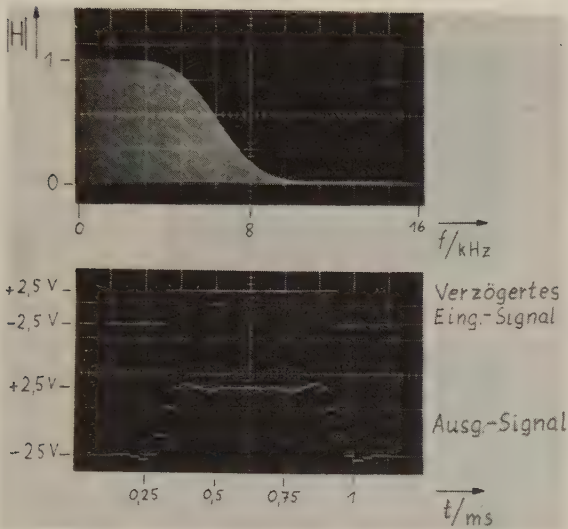


Bild 6.18: Frequenzgang (oben) und Rechteckantwort (unten) eines nichtrekursiven digitalen Butterworth-Filters 20. Grades, Abtastfrequenz $f_A = 32 \text{ kHz}$

Das letzte Beispiel ist ein Filter, an das primär im Zeitbereich Anforderungen gestellt werden: ein Differenzierfilter. Die Approximationsaufgabe ist hier dadurch gelöst worden, daß im Bereich $0 \leq f \leq f_A/2$ ein linearer Anstieg des Frequenzganges angenähert wurde /58/. Der maximale relative Fehler ist konstant, d.h. das Toleranzschema ist ein Keil mit der Spitze bei $f = 0$. Die Gruppenlaufzeit ist konstant, das Filter ist vom 31. Grade.

Das Filter 31. Grades ist hier mit einem zusätzlichen Faktor $\frac{1}{z}$ versehen, also als Filter 32. Grades realisiert worden, da die Anordnung nur gerade Filtergrade zuläßt. Bild 6.19 zeigt den Frequenzgang sowie die Wirkungsweise im Zeitbereich. Die Eingangsfunktion im unteren Bild ist die Impulsantwort eines passiven LC-Tiefpaßfilters.

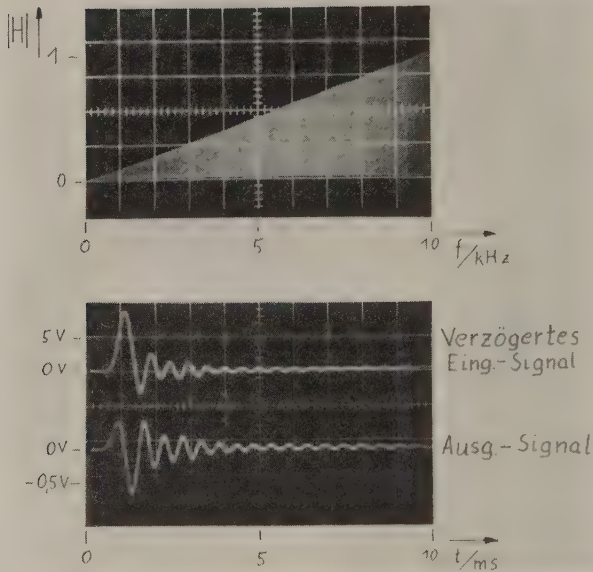


Bild 6.19: Frequenzgang (oben) und Differenzierung eines Zeitsignales (unten) bei einem Differenzierfilter 31. Grades. Abtastfrequenz $f_A = 20 \text{ kHz}$

Einige der in den vorangegangenen Abschnitten geschilderten Entwurfsüberlegungen sowie einige der hier vorgeführten Meßergebnisse sind bereits in /59/ publiziert worden.

7. Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden Verfahren zum Aufbau einstellbarer Filter untersucht. Das Schwergewicht der Untersuchungen liegt dabei in der Beurteilung der praktischen Brauchbarkeit verschiedener Möglichkeiten unter Berücksichtigung der schaltungstechnischen Probleme. Ein verhältnismäßig großer Teil der Arbeit widmet sich daher dem Schaltungsentwurf und der Auswertung von Meßergebnissen.

In den Kapiteln 2 bis 5 werden selektive Filter mit einstellbaren Grenzfrequenzen untersucht. Hierzu wird ein neues Verfahren angegeben, das die bekannten Eigenschaften der Reaktanztransformation unmittelbar für das schaltungstechnische Konzept heranzieht. Seine Eignung für RC-aktive Filter wird durch eine Simulation auf dem Analogrechner demonstriert. Ein nach demselben Prinzip arbeitendes einstellbares Abtastfilter ist entwickelt und aufgebaut worden. Das Verfahren wird ausführlich mit bisher bekannten Methoden verglichen, die Vor- und Nachteile werden diskutiert.

Es zeigt sich, daß das neue Verfahren für den Aufbau digitaler Filter nur in sehr beschränktem Maße anwendbar ist. Das sechste Kapitel befaßt sich daher mit dem Entwurf und Aufbau eines digitalen Filters, bei dem die Einstellbarkeit dadurch gegeben ist, daß die Koeffizienten beliebig programmierbar sind. Auf einfache Bedienbarkeit und komfortable Eingabe der gewünschten Koeffizienten wurde besonderer Wert gelegt. Die damit erreichbare Flexibilität ist mit herkömmlichen kontinuierlichen Systemen nicht annähernd möglich, der zunächst hoch erscheinende Schaltungsaufwand wird daher gerechtfertigt. Dabei ist insbesondere zu berücksichtigen, daß die ständig voranschreitende Entwicklung der monolithisch integrierten Technik, gerade der digitalen Bausteine, erwarten läßt, daß der Aufwand noch erheblich sinkt, nicht nur im Vergleich zu kontinuierlichen Systemen, sondern sogar absolut betrachtet.

LITERATURVERZEICHNIS

- / 1/ Fliege, N.:
Aktive Filter: Eigenschaften und Anwendungen.
NTZ (Kurier) 24, Nr. 11, S. K 176 - K 179
ibid. 24, Nr. 12, S. K 193 - K 199

- / 2/ Cauer, W.:
Theorie linearer Wechselstromschaltungen.
Akademie Verlags-Ges. Berlin, 2. Auflage 1954

- / 3/ Saal, R., Ulbrich, E.:
On the Design of Filters by Synthesis.
IRE Trans. Vol. CT-5 (1958), S. 284 - 327

- / 4/ Zdunek, J.:
Generation of Filter Functions from a Given Model.
PIEE 110, No. 2 (1963), S. 282 - 294

- / 5/ Glowatzki, E.:
Katalog der Potenz- und Tschebyscheff-Filter bis zum Grade $n=5$.
Telefunken-Zeitung, Jahrgang 28, Heft 107 (März 1955),
S. 14 - 22

- / 6/ Glowatzki, E.:
Katalog der Potenz- und Tschebyscheff-Filter vom Grade $n=6$ bis 9.
Telefunken-Zeitung, Jahrgang 34, Heft 132 (Juni 1961),
S. 180 - 185

- / 7/ Saal, R.:
Der Entwurf von Filtern mit Hilfe des Kataloges normierter Tiefpässe.
Telefunken AG, 1967

- / 8/ Christian, E., Eisenmann, E.:
Filter Design Tables and Graphs.
John Wiley & Sons, New York, 1966

- / 9/ Holmes, W. H., Heinlein, W., Grützmann, S.:
Empfindlichkeit von LC-Filtern, aktiven RC-Filtern und
aktiven C-Filtern.
Frequenz 22, Nr. 1 (1968), S. 2 - 11
- /10/ Orchard, H. J.:
Inductorless Filters.
Electron. Lett. Vol. 2 (1966), S. 224 - 225
- /11/ Fettweis, A.:
Digitalfilterstrukturen zur Nachbildung klassischer Netz-
werke.
AEÜ 25 (1971), S. 79 - 89
- /12/ Schüßler, W.:
Zur allgemeinen Theorie der Verzweigungsnetzwerke.
AEÜ 22 (1968), S. 361 - 367
- /13/ Schüßler, W.:
Ein Oktavbandpaß mit stetig veränderbarer Mittenfrequenz
im Tonfrequenzbereich.
Diplomarbeit am Inst. für Elektr. Nachrichtentechnik,
TH Aachen, 1954
- /14/ Ohme, W.:
Ein stetig veränderlicher Bandpaß für den Hörbereich.
Frequenz 14, Nr. 5 (1960), S. 182 - 186
- /15/ Bode, H. W.:
Network Analysis and Feedback Amplifier Design.
D. van Nostrand Comp., Princeton, 14. Aufl. 1964
- /16/ Moschytz, G. S.:
Inductorless Filters: a Survey.
Spectrum 7 (1970), No. 9, S. 63 ff.
- /17/ Bladowski, R.:
Integrierte Analogschaltungen.
Franckh'sche Verlagshandlung Stuttgart, 1970

- /18/ Sheahan, D. F., Orchard, H. J.:
Bandpass-Filter Realization Using Gyrators.
Electron. Lett. Vol. 3 (1967), S. 40 - 42
- /19/ Aisenbrey, H., Gohm, L., Griesinger, H.:
Ein allgemeines Verfahren zur Synthese aktiver RC-Filter.
Wissenschaftliche Berichte AEG-Telefunken 43 (1970) 1,
S. 46 - 62
- /20/ Instruction Manual Dual Hi/Lo-Filter 1022 F.
Rockland Laboratories, Blauvelt, N. J.
- /21/ Böhme, R., Reiche, V.:
Mit einem Element abstimmbare RC-Schaltung als Resonanz-
verstärker und Oszillator.
Nachrichtentechnik 21 (1971), Nr. 10, S. 340 - 342
- /22/ Schußler, W.:
Eigenschaften und Entwurf digitaler Filter.
NTZ 24, Nr. 6 (1971), S. 289 - 298
- /23/ Kuntz, W.:
Über Entwurf und Anwendung von Abtastfiltern.
Vortrag auf der NTG-Fachtagung "Analyse und Synthese von
Netzwerken", Stuttgart, 31.3./1.4.1966
- /24/ Galpin, R. K. P.:
Variable Electronic Allpass Delay Network.
Electron. Lett. Vol. 4 (1968), S. 137 - 139
- /25/ Franks, L. E., Sandberg, I. W.:
An Alternative Approach to the Realization of Network
Transfer Functions: The N-Path Filter.
BSTJ 39, No. 5 (1960), S. 1321 - 1350
- /26/ Möhrmann, K.:
Der Trägerrest in abgetasteten RC-Kreisen.
Frequenz 22 (1968), Nr. 5, S. 140 - 144

- /27/ Schüßler, W.:
Schaltung und Messung von Übertragungsfunktionen an
einem Analogrechner.
AEÜ 13 (1959), S. 405 - 419
- /28/ Gibbs, A. J.:
On the Frequency-Domain Responses of Causal Digital Filters.
Diss. Univ. of Wisconsin, 1969
- /29/ Kittel, L.:
Analyse und Simulation von Leitungsnetzwerken.
Diss. Univ. Erlangen, 1970
- /30/ Constantinides, A. G.:
Frequency Transformations for Digital Filters.
Electron. Lett. Vol. 3, No. 11 (1967), S. 487 - 489
- /31/ Constantinides, A. G.:
Frequency Transformations for Digital Filters.
Electron. Lett. Vol. 4, No. 7 (1968), S. 115 - 116
- /32/ Kuntz, W., Schüßler, W., Winkelkemper, W.:
Untersuchungen über Eigenschaften, Entwurf und Realisierung
digitaler Filter.
Heft 10 der Reihe: Ausgewählte Arbeiten über Nachrichten-
systeme, herausgegeben von Prof. Dr.-Ing. W. Schüßler,
Erlangen 1969
- /33/ Avenhaus, E.:
Zum Entwurf digitaler Filter mit minimaler Speicherwort-
länge für Koeffizienten und Zustandsgrößen.
Dissertation, Universität Erlangen, 1971
- /34/ Jackson, L. B., Kaiser, J. F., McDonald, H. S.:
An Approach to the Implementation of Digital Filters.
IEEE Trans. vol. AU-16 (1968), S. 413 - 421
- /35/ Schüßler, W., Winkelkemper, W.:
Veränderbare digitale Filter.
AEÜ 24, Nr. 11 (1970), S. 524 - 525

- /36/ Winkelkemper, W.:
Digitale Filter mit stetig veränderbaren Grenzfrequenzen.
Vortrag auf der NTG-Diskussionstagung "Analyse und Synthese
von Netzwerken", Stuttgart, 15/16.10.1970
- /37/ Kaiser, J. F.:
Digital Filters.
Kap. 7 in: Kuo und Kaiser:
System Analysis by Digital Computer.
John Wiley & Sons, New York, 1966
- /38/ Kettel, E.:
Ein automatischer Optimisator für den Abgleich des Impuls-
entzerrers in einer Datenübertragung.
AEÜ 18 (1964), S. 271 - 278
- /39/ Lucky, R. W., Rudin, H. R.:
An Automatic Equalizer for General-Purpose Communication
Channels.
BSTJ 46 (1967), S. 2179 - 2208
- /40/ Föllinger, O.:
Synthese von Abtastsystemen im Zeitbereich.
Regelungstechnik 13 (1965), S. 269 - 275
- /41/ Jackson, L. B.:
An Analysis of Roundoff Noise in Digital Filters.
Diss. Stevens Inst. of Techn., Hoboken, N. Y., 1969
- /42/ Hess, S. F.:
A Deterministic Analysis of Limit Cycle Oscillations
in Recursive Digital Filters Due to Quantization.
Diss. Naval Postgraduate School, Monterey, Cal., 1970
- /43/ Ebert, P. M., Mazo, J. E., Taylor, M. G.:
Overflow Oscillations in Digital Filters.
BSTJ Vol. 48, No. 9, S. 2999 - 3020
- /44/ Poschenrieder, P., Sontheim, H.:
Ein Analogiegerät für Aufgaben der Filterentwicklung.
Frequenz 13, Nr. 12 (1959), S. 379 - 385

- /45/ Paul, R. J. A.:
Simulation of Rational Transfer Functions with Adjustable Coefficients.
PIEE Vol. 110, No. 4 (1963), S. 671 - 679
- /46/ Paul, R. J. A.:
Realization of Fourth-Order Rational Transfer Functions with Adjustable Coefficients.
PIEE Vol. 111, No. 5 (1964), S. 877 - 882
- /47/ Schüßler, W.:
Der Echoentzerrer als Modell eines Übertragungskanal.
NTZ 16 (1963), S. 155 - 163
- /48/ Kuntz, W.:
Über Entwurf und Anwendung eines Abtast-Analogrechners.
Diss. TH Karlsruhe, 1966
- /49/ Herrmann, O.:
Design of Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase.
Electron. Lett. 6 (1970), S. 328 - 329
- /50/ Herrmann, O.:
On the Approximation Problem in Nonrecursive Digital Filter Design.
IEEE Trans. CT-18 (1971), S. 411 - 413
- /51/ Herrmann, O., Schüßler, W.:
Design of Nonrecursive Digital Filters with Minimum Phase.
Electron. Lett. 6 (1970), S. 329 - 330
- /52/ Mattera, L.:
Digital Filters with LSI Promise a New World of Applications.
Electronic Design 2, Jan. 1971, S. 24 - 26
- /53/ Herrmann, O., Schüßler, W.:
On the Accuracy Problem in the Design of Nonrecursive Digital Filters.
AEÜ 24 (1970), S. 525 - 526

- /54/ Avenhaus, E., Deigner, A.:
Minimisierung des Stör-Nutzsignalleistungsverhältnis
bei nichtrekursiven digitalen Filtern.
Seminarvortrag am Institut für Nachrichtentechnik der
Universität Erlangen, WS 1971/72
- /55/ The Integrated Circuits Catalogue for Design Engineers.
Texas Instruments Inc., 1971
- /56/ Pezaris, S. D.:
A 40 nsec 17-Bit by 17-Bit Array Multiplier.
IEEE Trans. Vol. C-20 (1971), S. 442 - 447
- /57/ Ernst, P.:
Entwurf und Aufbau eines digitalen Festkommamultiplizierers.
Diplomarbeit am Institut für Nachrichtentechnik, Erlangen
1970
- /58/ Rabiner, L. R.:
Ein Koeffizientensatz für ein differenzierendes digitales
Filter 31. Grades.
Persönliche Mitteilung
- /59/ Winkelkemper, W.:
Entwurf und Aufbau eines flexiblen nichtrekursiven digi-
talen Filters.
Vortrag auf der NTG-Diskussionstagung "Digitale Filter",
Erlangen, 23./24.3.1972

L e b e n s l a u f

Ich wurde als zweites von drei Kindern meiner Eltern, des Dr.-Ing. Heinrich Winkelkemper und seiner Ehefrau, der Ärztin Dr. med. Gertrud Winkelkemper, geb. Fischer, am 21. Oktober 1942 in Berlin geboren.

Vom 1. September 1948 bis Ostern 1952 besuchte ich die 13. Volksschule Berlin-Altglienicke. Ostern 1952 wechselte ich in das Canisius-Kolleg-Gymnasium in Berlin-Tiergarten über. Ich blieb an dieser Schule bis zum Abitur am 15. März 1961.

Vom 1. April 1961 bis 11. August 1961 war ich im Schaltwerk der Siemens-AG in Berlin als Hochschul-Praktikant beschäftigt.

Nach Beendigung meines Wehrdienstes vom 1. Oktober 1961 bis 30. September 1963 begann ich im Wintersemester 1963/64 das Studium der Elektrotechnik an der Technischen Universität Karlsruhe. Ich beendigte mein Studium mit der Diplomprüfung am 11. November 1968.

Seit dem 1. Januar 1969 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Nachrichtentechnik der Universität Erlangen angestellt.

Wolfgang Winkelkemper

Offsetdruck-Fotodruck

J. Hogl, 8520 Erlangen, Hauptstr. 109 (Nähe Martin-Luther-Platz) Tel.22990